Sobolev優臨界な半線形熱方程式における臨界ノルム爆発

高橋仁　(東京工業大学)

次の半線形熱方程式について考える．

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T_*), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし $n \geq 1$, $p > 1$ とし $0 < T_* \leq \infty$ を最大存在時刻とする．もし $T_* < \infty$ ならば $\lim_{t\to T_*} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \infty$ となり，これは解の有限時間爆発と呼ばれる．また，この方程式はスケール変換 $u_\lambda(x,t) := \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ $(\lambda > 0)$ に関して不変であり，スケール不変な空間として臨界空間 $L^{q_c}(\mathbb{R}^n)$ $(q_c := n(p-1)/2)$ が定まる．そこで，次の臨界ノルム爆発問題を考察する:

$$T_* < \infty \text{ のとき}, \lim_{t\to T_*} \|u(\cdot,t)\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^n)} = \infty \text{ が成り立つか?}$$

最近，溝口-Souplet [3] は任意の $p > 1$ に対し，もし爆発が type I であれば臨界ノルムが爆発するということを示した．また，[1] では p が Sobolev 優臨界 $p > p_S := (n+2)/(n-2)$ $(n \geq 3)$ のとき，一般に $\limsup_{t\to T_*} \|u(\cdot,t)\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^n)} = \infty$ となることが示されている．本講演では [1] の改良として以下を示す．

定理 1 ([2]) Let $n \geq 3$, $p > p_S$ and u be a classical solution of (1) with $u_0 \in L^{q_c}(\mathbb{R}^n)$. If the maximal existence time T_* is finite, then

$$\lim_{t\to T_*} \|u(\cdot,t)\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^n)} = \infty.$$

なお，$p = p_S$ で $n = 3, 4, 5$ の場合には臨界ノルムが有界であるような有限時間爆発解の存在が知られている．

本講演の内容は三浦英之氏（東京工業大学）との共同研究に基づく．

参考文献

[1] H. Miura, J. Takahashi, Blow-up of the critical norm for a supercritical semilinear heat equation, to appear in J. Eur. Math. Soc., arXiv: 2206.10790.

[2] H. Miura, J. Takahashi, Critical norm blow-up for the energy supercritical nonlinear heat equation, preprint, arXiv: 2310.09750.

[3] N. Mizoguchi, Ph. Souplet, Optimal condition for blow-up of the critical L^q norm for the semilinear heat equation. Adv. Math. 355 (2019), 106763, 24 pp.