

Global solvability of the chemotaxis-fluid system with rotational flux via the maximal regularity theory

武内太貴 (京都大学)

1 導入

滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) 上において、次の形で表される流体中の走化性方程式系の初期値問題

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t n = \Delta n - \nabla \cdot (nS(t, x)\nabla c) - \mathbf{u} \cdot \nabla n, & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial_t c = \Delta c - c + n - \mathbf{u} \cdot \nabla c, & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} - \nabla p + n\nabla \varphi + \mathbf{f}, & t > 0, x \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ \nabla n \cdot \boldsymbol{\nu} = nS(t, x)\nabla c \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \nabla c \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{u} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ (n, c, \mathbf{u})(0, x) = (n_0, c_0, \mathbf{u}_0)(x), & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.1)$$

について考察する. ここで $n = n(t, x)$, $c = c(t, x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, $p = p(t, x)$ は未知関数であり, $\varphi = \varphi(x)$ および $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$ は既知の関数, $(n_0, c_0, \mathbf{u}_0)(x)$ は初期値とする. また $S = S(t, x)$ は既知の $\mathbb{R}^{N \times N}$ -値関数であり, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(x)$ は境界の外向き単位法線ベクトルを表す. なお S が単位行列の場合は $\nabla n \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ となり, 従来のモデルが得られる. 一方で, 本講演では Xue, Othmer [6] によって提唱された, 実際の実験結果との整合性がより高いモデル (1.1) を考察する. Wang, Winkler, Xiang [5] は $N = 2$ において初期値の大きさの仮定をせずに (1.1) の時間大域古典解を構成し, Wang [4] は $N = 3$ において時間大域弱解の存在を示した. 類似のモデルに関するよく知られた Cao, Lankeit [1] の結果も参照せよ. なお上記および後続の結果に関して, いずれも解の一意性は議論されていない. これは非線形境界条件に起因し, 実際に先行研究では適切なカットオフと一様エネルギー評価に基づく収束部分列の構成に依存している. 本講演では, 最大正則性定理と縮小写像の原理を組み合わせ, 初期値を小さくする代わりに (1.1) の一意的な時間大域解を直接構成する.

2 主結果

定理 2.1. 指数 $N < r < \infty$ および $2 < q < \infty$ は $1/r + 2/q > 1$ を満たすとする. このとき Ω と q にのみ依存する定数 $\lambda_* > 0$ が存在するが³, ここで $0 < \lambda < \lambda_*$ を取る. 初期値は $n_0 \in B_{r,q}^{2-2/q}(\Omega)$, $c_0 \in B_{r,q}^{3-2/q}(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^r(\Omega) \cap B_{r,q}^{2-2/q}(\Omega)^N$ かつ $\partial\Omega$ 上 $\nabla c_0 \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{u}_0 = 0$ とする. ここで $B_{r,q}^s(\Omega)$ は Besov 空間, $L_\sigma^r(\Omega)$ は標準的なソレノイダル条件を満たす $L^r(\Omega)^N$ の部分空間を表す. また $\nabla \varphi \in L^r(\Omega)^N$ および $e^{\lambda t} \mathbf{f} \in L^q(0, \infty; L^r(\Omega)^N)$ かつ

$$S \in L^\infty(0, \infty; W^{1,r}(\Omega)^{N^2}), \quad \partial_t S \in L^q(0, \infty; L^r(\Omega)^{N^2})$$

本講演は渡邊圭市氏 (公立諏訪東京理科大学) との共同研究に基づく.

とする. このとき $n_0, c_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{f}$ に依存しない定数 $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$\|n_0\|_{B_{r,q}^{2-2/q}(\Omega)} + \|c_0\|_{B_{r,q}^{3-2/q}(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{B_{r,q}^{2-2/q}(\Omega)} + \|e^{\lambda t} \mathbf{f}\|_{L^q(L^r(\Omega))} \leq \varepsilon$$

ならば, 次の最大正則性を持つ (1.1) の一意的な時間大域解 $(n, c, \mathbf{u})$ が存在する:

$$\begin{cases} e^{\lambda t}(n - \bar{n}_0) \in L^q(0, \infty; W^{2,r}(\Omega)) \cap W^{1,q}(0, \infty; L^r(\Omega)), \\ e^{\lambda t}\{c - (1 - e^{-t})\bar{n}_0\} \in L^q(0, \infty; W^{3,r}(\Omega)) \cap W^{1,q}(0, \infty; W^{1,r}(\Omega)), \\ e^{\lambda t}\mathbf{u} \in L^q(0, \infty; W^{2,r}(\Omega)) \cap W^{1,q}(0, \infty; L_\sigma^r(\Omega)). \end{cases}$$

ここで, $\bar{n}_0 := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} n_0(x) dx$ である.

なお, 実際には $1/r + 2/q < 1$ の場合でも類似の主張は成立し, λ の条件もより一般化できる. 定数 ε は φ と S に依存するが, これも実際は明示的な依存度の表現が可能である. また適切な付加条件の下では, 解の古典的な可微分性および n, c の非負値性も示される.

3 証明の概略

主結果の証明で最も重要となるのは, 次の Neumann 型の線形熱方程式の解析である:

$$\begin{cases} \partial_t U - \Delta U = -\nabla \cdot \mathbf{F}_B + F_E, & t > 0, x \in \Omega, \\ \nabla U \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{F}_B \cdot \boldsymbol{\nu}, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ U(0, x) = F_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

なお Prüss, Simonett [2] によって既に (3.1) に対する時間大域解の存在とその最大正則性評価は示されているが, この結果は解の評価が時間に対して指数増大してしまうため, 非線形問題 (1.1) に対する時間大域可解性の議論には直接適用できない. この問題に対して, Neumann–Laplacian に対するレゾルベント問題を精密に解析し, [2] で与えられた最大正則性評価と Shibata [3] による手法を組み合わせることで, 所望の (3.1) に対する時間大域解の最大正則性評価を得る. 非線形問題 (1.1) に関しては, Hölder の不等式や Sobolev の埋め込みなどの基本的な手法で非線形評価を示すことができ, 縮小写像の原理の適用によって時間大域可解性が示される.

参考文献

- [1] X. Cao and J. Lankeit, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), no. 4, Art. 107, 39.
- [2] J. Prüss and G. Simonett, Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016.
- [3] Y. Shibata, J. Differential Equations **258** (2015), no. 12, 4127–4155.
- [4] Y. Wang, Math. Models Methods Appl. Sci. **27** (2017), no. 14, 2745–2780.
- [5] Y. Wang, M. Winkler, and Z. Xiang, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **18** (2018), no. 2, 421–466.
- [6] C. Xue and H. G. Othmer, SIAM J. Appl. Math. **70** (2009), no. 1, 133–167.