

消散型非線形シュレディンガー方程式の大きな初期データをもつ解の

L^2 減衰評価(改良版)

北 直泰 (熊本大学 先端科学研究部(工学系))

本講演は、宮崎隼人氏(香川大学)および佐藤拓也氏(熊本大学)との共同研究に基づく。次の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + \lambda|u|^{p-1}u & (t \in [0, \infty), x \in \mathbf{R}^n) \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

ここで、未知関数 $u = u(t, x)$ は複素数値である。また、 $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ であり、非線形項については以下の条件(1), (2)を仮定する。

$$1 < p \leq 1 + 2/n \quad (\text{散乱臨界ベキ}), \quad (1)$$

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (\lambda_1 \in \mathbf{R}, \lambda_2 < 0),$$

$$(p-1)|\lambda_1| \leq 2\sqrt{p}|\lambda_2| \quad (\text{強消散条件}) \quad (2)$$

非線形項のベキ p が散乱臨界ベキ $1 + 2/n$ 以下の場合、非線形項の影響が大きな t においても根強く残るので、減衰評価や漸近挙動に非線形効果が表れる。解の $t \rightarrow \infty$ における減衰評価や漸近挙動を調べる研究は数多く存在するが、多くの場合、初期データ u_0 に重み付き Sobolev ノルムの意味で「小ささ」を仮定している。初期データに小ささを課す最大の理由は、 $\|Ju(t)\|_{L^2}$ の増大度が初期データのサイズに依存してしまうところにある。ここで、 $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)$ は作用素 J_k ($k = 1, 2, \dots, n$) をベクトルのように並べたものであり、 $J_k = x_k + it\partial_{x_k}$ は Galilei 変換 $u_\varepsilon(t, x) = e^{i\varepsilon^2 t/2} e^{i\varepsilon x_k} u(t, x - \varepsilon t e_k)$ の微小生成演算子を $-i$ 倍したものである。 $\|Ju(t)\|_{L^2}$ の評価を詳しく述べると、ある正定数 C_0, C_1 が存在して、

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C_0(1+t)^{C_1\mu^{p-1}} \quad (3)$$

が成り立つ。ここで、 μ は初期データのサイズを表す。漸近解析の証明で現れる剰余項は $\|Ju(t)\|_{L^2}$ を含む量で評価されることが多い。そのため、剰余項の影響を抑えるために、 $\mu > 0$ を小さく絞ることになる。

本研究の目的は、初期データの小ささを外して解の L^2 減衰評価を得ることである。非線形項に強消散条件(2)を課すと、

$$\|Ju(t)\|_{L^2} \leq \|xu_0\|_{L^2} \quad (4)$$

のように、 $\|Ju(t)\|_{L^2}$ を定数で抑えることができる。それ故、剰余項を評価しやすい。

【既存の結果】 強消散条件の下で、Hayashi-Li-Naumkin [1] は、初期データに $u_0 \in H^1$, $xu_0 \in L^2$ (サイズの制限なし) を課して、 $t \rightarrow \infty$ での L^2 減衰評価

$$\|u(t)\|_{L^2} = \begin{cases} O((\log t)^{-n/(n+2)}) & (p = 1 + 2/n) \\ O(t^{-2d/(n+2)}) & (1 < p < 1 + 2/n) \end{cases}$$

を得ている。なお、減衰オーダーに含まれる d は、 $d = 1/(p-1) - n/2$ である。

【本講演での結果】 Schrödinger 方程式の Laplacian $-\frac{1}{2}\Delta$ は「分散性」を表す。つまり、線形 Schrödinger 方程式 $i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u$ を満たす平面波解 $e^{i(\xi \cdot x - \xi^2 t/2)}$ の素性からわかるように、波数 $|\xi|$ が大きい波ほど早く空間を伝搬する。これは、データの正則性が悪い(大きな波数成分が多い)と、解の空間的な広がりが早く、逆に、データの正則性が良い(大きな波数成分が少ない)と、解の空間的な広がりが遅いことを意味する。

この分散性から次の事柄が推測される。データの正則性が良いと、解は空間的に広がりにくいので、非線形消散効果を存分に受け取ることができる。従って、データの正則性が良いと、解の L^2 ノルムは早く減衰する。

我々は、強消散条件の下で、初期データに Hayashi-Li-Naumkin [1] よりも高い正則性 $u_0 \in H^2$ および $x^2 u_0 \in L^2$ を課して、次の結果を得た。

Main Theorem 条件(1)と(2)を仮定する。さらに、 $u_0 \in H^2$ および $x^2 u_0 \in L^2$ (サイズの制限なし)とする。このとき、(NLS) の時間大域的な解 u が

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \infty); H^2) \cap C^1([0, \infty); L^2), \\ J^2 u &\in C([0, \infty); L^2) \end{aligned}$$

において一意的に存在する。さらに、この解は $t \rightarrow \infty$ において、

$$\|u(t)\|_{L^2} = \begin{cases} O((\log t)^{-2n/(n+4)}) & (p = 1 + 2/n) \\ O(t^{-4d/(n+4)}) & (1 < p < 1 + 2/n) \end{cases}$$

を満たす。ただし、 $d = 1/(p-1) - n/2$ である。

Main Theorem において、 $\|u(t)\|_{L^2}$ の減衰が Hayashi-Li-Naumkin の結果よりも早いことに注意。証明では、以下の2点を乗り越えることが必要になる。

- 非線形項のベキ p が2よりも小さくなりうるため、 $J^2 u(t) \in L^2$ を満たす解の存在証明で工夫が必要である。(pseudo-conformal 変換 $w(s, \xi) = FMU(-t)u(t)|_{t=-s^{-1}}$ を利用する。ここで、 F は Fourier 変換、 $M = e^{ix^2/2t}$, $U(t) = e^{it\Delta/2}$ とする。)
- $\|J^2 u(t)\|_{L^2}$ の大域的評価が必要である。($\|\partial_s w(s)\|_{L^2}$ の大域的評価で置き換える。)

参考文献

- [1] N.Hayashi, C.Li, Naumkin, “Time decay for nonlinear dissipative Schrödinger equations in optical fields,” Adv. Math. Phys. 2016, Article ID 3702738, (2016).