

移流項付きアレン・カーン方程式の収束性 について

塚本 悠暉 (東京理科大学)

1. 導入

本稿では定常状態及び時間発展する移流項付きアレン・カーン方程式

$$g \cdot \nabla u = \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon^2} \text{ on } \Omega \times [0, T] \quad (1)$$

$$\partial_t u + g \cdot \nabla u = \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon^2} \text{ on } \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

について考察する. ただし W は double well potential であり, ここでは $W(s) = (1 - s^2)^2/4$ とする. また, $g \cdot \nabla u$ を移流項という. このアレン・カーン方程式のエネルギー

$$E_t := \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon |\nabla u(x, t)|^2}{2} + \frac{W(u(x, t))}{\varepsilon} \right) dx$$

が有界のとき, $\varepsilon \rightarrow 0$ にすると $u = \pm 1$ になることが期待され, これは u が 2 相分離していることを表している. この相分離の境界面は $\{x \in \Omega; u(x) = 0\}$ と考えられるが, より扱いやすい以下の varifold によって定義する.

$$V(\phi) := \int_{\{|\nabla u| \neq 0\}} \phi \left(x, I - \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \otimes \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) d\mu_t,$$

for any $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n \times G(n, n-1))$. ここで $G(n, n-1)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の $n-1$ 次元グラスマン多様体であり,

$$\mu_t(A) := \int_A \left(\frac{\varepsilon |\nabla u(x, t)|^2}{2} + \frac{W(u(x, t))}{\varepsilon} \right) dx$$

とする. 移流項 $g \cdot \nabla u$ が存在しない場合, 定常状態の方程式 (1) においては, 境界面が極小曲面になることが知られている [1]. また, 時間発展する方程式 (2) においては, 境界面が平均曲率流に従うことが示されている [2]. これらを参考にするこで, 移流項付きアレン・カーン方程式について以下の結果を得た.

2. 主結果

Theorem 2.1 ([3]) $2 \leq n$, $\frac{n}{2} < p$ とする. $g_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ と関数 $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ について, (1) が成り立つとする. 定数 c_0 が存在し以下を満たすとする.

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} + \|g_\varepsilon\|_{W^{1,p}} + E \leq c_0,$$

このとき, 収束する部分列 $g_\varepsilon \rightarrow g_0$ weakly in $W^{1,p}$, $V_\varepsilon \rightarrow V$ in the varifold sense が存在し, 次を満たす. V は $H_V(x) = (g_0 \cdot \nu)\nu$ を一般化された意味で満たす. ここで $H_V(x)$ は曲面の平均曲率ベクトルを表し, ν は曲面の単位法線ベクトルを表す.

Theorem 2.2 ([3]) M を滑らかな n 次元コンパクトリーマン多様体とする. $\rho \in W^{2,p}(M)$ とする ($p > n/2$). このとき $H_V(x) = (\nabla \rho \cdot \nu)\nu$ を一般化された意味で満たす varifold V が存在する.

Theorem 2.3 ([4]) $2 \leq n$, $2 < q < \infty$, $\frac{nq}{2(q-1)} < p < \infty$ (ただし $n = 2$ のときは $\frac{4}{3} \leq p < \infty$), $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon < 1$ とする. また $g_\varepsilon \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$ と関数 u_ε について, $\nabla^j u_\varepsilon, \partial_t \nabla^k u_\varepsilon \in C(\Omega \times [0, T])$ ($k \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$) と (2) が成り立つとする. 定数 $\Lambda_0, M_0 > 0$ が存在し以下を満たすとする.

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega \times [0, T]} |u_\varepsilon| &\leq 1, \\ \sup_{\Omega \times [0, T]} |g_\varepsilon| &\leq \varepsilon^{-\beta}, \quad \sup_{\Omega \times [0, T]} |\nabla g_\varepsilon| \leq \varepsilon^{-(\beta+1)}, \\ \|g_\varepsilon\|_{L^q([0, T]; (W^{1,p}(\Omega))^n)} &\leq \Lambda_0, \\ \sup_{[0, T]} E_t &\leq M_0. \end{aligned}$$

$\Omega' \subset\subset \Omega$ と $0 < \tau < T$ を取る. このとき $n, p, q, \beta, \Lambda_0, M_0, \tau, \Omega', \Omega, W$ に依存する定数 $\varepsilon_1, D_1 > 0$ が存在して, $\varepsilon < \varepsilon_1$ ならば以下の不等式が成り立つ.

$$\sup_{U_r(x) \subset \Omega', t \in [\tau, T]} \frac{\mu_t(B_r(x))}{r^{n-1}} \leq D_1.$$

Theorem 2.4 ([4]) $2 \leq n$, $2 < q < \infty$, $\frac{nq}{2(q-1)} < p < \infty$ (ただし $n = 2$ のときは $\frac{4}{3} \leq p < \infty$), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする. 関数 $\rho \in L^q([0, \infty); W^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0, \infty); L^\infty(\Omega))$ とする. さらに $\Omega_0 \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$ について $\chi_{\Omega_0} \in BV(\Omega)$ とする. このとき $v = h + (\nabla \rho \cdot \nu)\nu$ と $\lim_{t \searrow 0} \|V_t\| = \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega_0}$ を一般化された意味で満たす varifold $\{V_t\}_{t>0} \subset \mathbf{V}_{n-1}(\Omega')$ が存在する.

参考文献

- [1] L. Modica, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal. **98** (1987), no. 2, 123–142.
- [2] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 2, 417–461.
- [3] Y. Tonegawa, Y. Tsukamoto, *A diffused interface with the advection term in a Sobolev space*, Calc. Var., **59** (2020), 184.
- [4] Y. Tsukamoto, *Convergence of the Allen-Cahn equation with transport term in a bounded domain*, Differential and Integral Equations, **37** (3/4) (2024), 207–236.