

Fokker-Planck 方程式とエネルギー散逸則

水野 将司 (日本大学理工学部) *

次の非線形 Fokker-Planck 方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla (d(x) \log \rho + \phi(x))) = 0, & x \in \mathbb{T}^n, \quad t > 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad (\text{NFP})$$

ここで, $\mathbb{T}^n = [0, 1)^n$ は n 次元トーラス, $d = d(x)$ は $\mathbb{T}^n$ 上の正値で滑らかな関数, $\phi = \phi(x)$ は $\mathbb{T}^n$ 上の滑らかな関数, $\rho_0 = \rho_0(x)$ は与えられた $\mathbb{T}^n$ 上の確率密度関数とする. $\rho = \rho(x, t)$ は $\mathbb{T}^n \times [0, \infty)$ 上の未知の確率密度関数である. 本講演では, (NFP) を考える動機と, エネルギー散逸則の散逸項の長時間挙動について述べる.

(NFP) を考察する動機を述べるために, 次の $\mathbb{R}^n$ 上の確率微分方程式を考える (cf. [1, §8.1]):

$$d\mathbf{X}_t = -\nabla \phi(\mathbf{X}_t) dt + \sigma(\mathbf{X}_t) d\mathbf{B}_t, \quad t > 0. \quad (\text{SDE})$$

ここで, ϕ は $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数, $\{\mathbf{B}_t\}_{t \geq 0}$ は n 次元 Brown 運動, σ は (簡単のため) スカラー値関数とする. (SDE) の解に対する遷移確率密度関数 $\rho(x, t)$ が存在して, $y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\rho(x, t) dx = P(\mathbf{X}_t \in [x, x + dx] : X_0 = y)$$

で与えられているとする. すると, 伊藤積分によって (SDE) を定式化すると, ρ は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \nabla \phi(x)) + \frac{1}{2} \Delta(\sigma^2(x) \rho) \quad (1)$$

の弱解になることがわかる. (SDE) は Fokker-Planck 方程式, もしくは Kolmogorov の前進方程式という.

σ が定数のとき,

$$\mathcal{F}_0[\rho] := \int_{\mathbb{R}^n} \rho \left(\frac{\sigma^2}{2} (\log \rho - 1) + \phi(x) \right) dx, \quad \mathcal{D}_0[\rho] := \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{\sigma^2}{2} \log \rho + \phi(x) \right) \right|^2 \rho dx$$

と定めると, (1) の (空間遠方に十分な減衰を与えた) 古典解 ρ に対して, エネルギー散逸則

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_0[\rho] + \mathcal{D}_0[\rho] = 0 \quad (2)$$

をみtas. 一方, σ が x の関数のとき, (2) が得られるかどうかはわからない. なぜなら, σ が定数のとき, $\mathcal{F}_0$ の被積分関数は (1) を連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{CE})$$

で書いたときの速度ベクトル $\mathbf{u}$ のスカラーポテンシャルとなるが, σ が関数のときは, 速度ベクトルがスカラーポテンシャルを持つかが明らかでないためである.

そこで, 見方を変えて, $d := \sigma^2/2$ として

$$\mathcal{F}[\rho] := \int_{\mathbb{R}^n} \rho (d(x) (\log \rho - 1) + \phi(x)) dx, \quad \mathcal{D}[\rho] := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (d(x) \log \rho + \phi(x))|^2 \rho dx$$

* 本研究は Y. Epshteyn (ユタ大学), C. Liu (イリノイ工科大学) との共同研究 [2] に基づく.

とエネルギー散逸則

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\rho] + \mathcal{D}[\rho] = 0, \quad (\text{EDL})$$

連続の方程式 (CE) をみたすときの速度 $\mathbf{u}$ の十分条件を求めてみる. すると $\mathbf{u} = -\nabla(d(x) \log \rho + \phi(x))$ が得られる. (NFP) はこの考えによって導出したものである. なお, (EDL) から, (NFP) の平衡解として, $\mathbf{u} = 0$ となる解, すなわち,

$$\rho_{\text{eq}}(x) := \exp\left(-\frac{\phi(x) - C}{d(x)}\right)$$

が得られる. ただし, C は ρ_{eq} が確率密度関数となるように定めた定数である. すなわち, (EDL) は平衡解の存在を保証することと考えることもできる.

次にエネルギー散逸則 (EDL) の散逸項 $\mathcal{D}[\rho]$ の長時間挙動を考察する. d が定数のときエントロピー消散法 [3, 4] の手法が有効である. 他方, d が $\mathbb{T}^n$ 上の関数のときは, このような研究方向はないようである. 本研究では, $\mathcal{D}$ が指数減衰するための d についての十分条件を与えた.

定理 1. 空間次元を $n = 1, 2, 3$ とする. 固定された $\gamma > 0$ に対して, $n, \nabla^2 \phi, \gamma, \rho_0, \nabla d(x), \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)}$ に依存する正定数 $C_1 \geq 1, C_2 > 0$ が存在して,

$$d(x) \geq C_1 \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} |\nabla(d(x) \log \rho_0 + \phi(x))|^2 \rho_0 dx \leq C_2,$$

が成り立つならば, (NFP) の古典解 ρ に対して:

$$D[\rho] \leq C_3 e^{-\gamma t}, \quad t > 0$$

が成り立つ. ただし, $C_3 > 0$ は正定数である.

定理の証明のために, $\mathcal{F}$ の 2 階微分を計算する. [3] の計算を参考にすると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho] &= 2 \int_{\mathbb{T}^n} ((\nabla^2 \phi(x)) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \rho dx + 2 \int_{\mathbb{T}^n} d(x) |\nabla \mathbf{u}|^2 \rho dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}^n} (\log \rho - 1) \nabla |\mathbf{u}|^2 \cdot \nabla d(x) \rho dx - 2 \int_{\mathbb{T}^n} (1 + \log \rho) \mathbf{u} \cdot \nabla d(x) \operatorname{div} \mathbf{u} \rho dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{d(x)} |\mathbf{u}|^2 \log \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla d(x)) \rho dx + 2 \int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{d(x)} (\log \rho)^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla d(x))^2 \rho dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{d(x)} \log \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla d(x)) (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi(x)) \rho dx. \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる. (3) の右辺の ∇d を含む項を評価して, 微分不等式を構成することで定理を示すことができる. 空間次元についての仮定 $n \leq 3$ は, $\mathbf{u}$ の 3 次の項を $\nabla \mathbf{u}$ で評価するために Sobolev の不等式を用いたことによる.

参考文献

- [1] W. E, T. Li, and E. Vanden-Eijnden, *Applied stochastic analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 199, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [2] Y. Epshteyn, C. Liu, and M. Mizuno, *Longtime asymptotic behavior of nonlinear Fokker-Planck type equations with periodic boundary conditions*, 2024.
- [3] A. Jüngel, *Entropy methods for diffusive partial differential equations*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, [Cham], 2016.
- [4] P. A. Markowich and C. Villani, *On the trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation: an interplay between physics and functional analysis*, VI Workshop on Partial Differential Equations, Part II (Rio de Janeiro, 1999), vol. 19, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2000, pp. 1–29.