

Strichartz estimates for (k, a) -generalized Laguerre operators

平良晃一 (九州大学 数理学研究院)*

この研究は田森宥好氏（芝浦工大）との共同研究である。

1. 背景

本講演では, [1]において Ben Saïd-Kobayashi-Ørsted により導入された (k, a) -generalized Laguerre operator

$$H_{k,a} := -|x|^{2-a}\Delta_k + |x|^a \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}^n; \vartheta_{k,a}(x)dx)$$

を考え, 対応する Schrödinger 方程式に対する Strichartz 評価について得られた結果を述べる. ここで, k は non-negative multiplicity function, $a > 0$ はパラメータ, Δ_k は Dunkl Laplacian を表し, $\vartheta_{k,a}(x)$ は $[1, (1.2)]$ で定義され $\vartheta_{0,a}(x) = |x|^{a-2}$ が成り立つ. さらに, $H_{k,a}$ は以下のような特徴を持つ:

- $k \equiv 0$ かつ $a = 2$ の場合 $H_{0,2} = -\Delta + |x|^2$ は調和振動子を表し, Weil 表現と呼ばれるメタプレクティック群 $\text{Mp}(n, \mathbb{R})$ の極小表現に由来する.
- $k \equiv 0$ かつ $a = 1$ の場合 $H_{0,1} = -|x|\Delta + |x|$ はローレンツ群 (の被覆) $\tilde{\text{O}}_0(n+1, 2)$ の極小表現に由来し, [8] などによりその性質が調べられていた. さらに, この作用素の離散固有値は水素原子の Hamiltonian $-\Delta - \frac{1}{|x|}$ の固有値と対応している.
- $H_{k,a}$ は (より小さい群である) $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の対称性を保ちつつ, これらの重要な極小表現を補間する作用素になっている. 具体的には, $E_{k,a}^+ = \frac{i}{a}|x|^a$, $E_{k,a}^- = \frac{i}{a}|x|^{2-a}\Delta_k$, $A_{k,a} = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i} + \frac{n+2\langle k \rangle + a - 2}{a}$ とおくと $H_{k,a} = ia(E_{k,a}^- - E_{k,a}^+)$ であって交換関係

$$[E_{k,a}^+, E_{k,a}^-] = A_{k,a}, \quad [A_{k,a}, E_{k,a}^\pm] = \pm 2E_{k,a}^\pm$$

が Lie 環 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の生成元の交換関係に対応している.

- $\mathcal{F}_{k,a} = e^{\frac{\pi i}{2a}(2\langle k \rangle + n + a - 2)} e^{-\frac{\pi i}{2a}H_{k,a}}$ とおくと, $\mathcal{F}_{0,2}$ は通常の Fourier 変換, $\mathcal{F}_{0,1}$ は Hankel 変換, $\mathcal{F}_{k,0}$ は Dunkl 変換と一致する. そのため, $\mathcal{F}_{k,a}$ はフーリエ変換の自然な一般化であると考えられる. [1] では $\mathcal{F}_{k,a}$ に対応する調和解析が展開できることを示唆しており, 不確定性原理について考察している.

2. 主結果

そこで本研究では [1] で挙げられていた問題の一つである, 対応する Schrödinger 方程式の Strichartz 評価を証明した.

* e-mail: taira.kouichi.800@m.kyushu-u.ac.jp

定理 1. [9] $n \geq 2$, $2\langle k \rangle + n + a - 2 > 0$ かつ $0 < a \leq 2$ とする. また, $n \geq 3$ かつ $1 < a < 2$ の場合には $k \equiv 0$ も仮定する. さらに, $\sigma := \sigma_{a,k,n} = \frac{2\langle k \rangle + n + a - 2}{a}$ とおいて, 許容対 $(p, q) \in [2, \infty]^2$ を

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} = \frac{\sigma}{2} \quad \text{and} \quad (p, q, \sigma) \neq (2, \infty, 1). \quad (1)$$

により定める. このとき, 全ての $T > 0$ に対してある $C > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} \|e^{-itH_{k,a}}u\|_{L^p([-T,T];L^q)} &\leq C\|u\|_{L^2}, \\ \left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H_{k,a}} f(s) ds \right\|_{L^{p_1}([-T,T];L^{q_1})} &\leq C\|f\|_{L^{p_2^*}([-T,T];L^{q_2^*})} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, (p, q) 及び (p_j, q_j) は (1) を満たし, $r^* = r/r - 1$ とかく. さらに, $1 < a < 2$ かつ $\sigma > 1$ のときには $(p_j, q_j) \neq (2, \frac{2\sigma}{\sigma-1})$ が成り立つことを仮定する.

この結果は $a = 1, 2$ の場合には [2] などによって証明されていた. 実際, [1] によって $e^{-itH_{k,a}}$ の積分核は

$$c_{k,a} \frac{e^{i\frac{|x|^a + |x'|^a}{a} \cot(at)}}{(i \sin(at))^{\frac{2\langle k \rangle + n + a - 2}{a}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{J} \left(\frac{2}{a}, \frac{2\langle k \rangle + n - 2}{2}; -i \frac{2|x|^{\frac{a}{2}}|x'|^{\frac{a}{2}}}{a \sin(at)}; \hat{\xi} \cdot \hat{x}' \right) d\mu_{\hat{x}}^k(\xi), \quad (2)$$

$$\mathcal{J}(b, \nu; w; s) := \Gamma(b\nu + 1) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{2} \right)^{bm} \tilde{I}_{b(m+\nu)}(w) (m + \nu) \nu^{-1} C_m^\nu(s) \quad (3)$$

と書けることが知られている. ここで, $c_{k,a}$ は定数, $d\mu$ はある測度で, $\tilde{I}_k$ は normalized Bessel 関数, C_m^ν は Gegenbauer 多項式である. さらに, $a = 1, 2$ に対応する $b = 2, 1$ の場合には $\mathcal{J}(2, \nu; w; t) = \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{w}{2} \right)^m \tilde{I}_{\nu+m}(w)$, $\mathcal{J}(1, \nu; w; t) = e^{wt}$ のように和 $\mathcal{J}$ は非常に単純な構造を持つため, (2) を用いれば分散型評価:

$$\|e^{-itH_{k,a}}(x, y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x,y}^{2n})} \lesssim \frac{1}{|\sin(at)|^{\frac{2\langle k \rangle + n + a - 2}{a}}} \quad (4)$$

そこで, Keel-Tao の結果 ([7]) を用いれば Strichartz 評価は比較的簡単に証明することができる.

和 $\mathcal{J}$ について

$\mathcal{J}$ の表示 (3) は少々複雑に見えるかもしれないが, 大雑把には以下のように理解できる: まず, 作用素 $H_{k,a}$ を $k = 0$ の場合に考えると,

$$H_{0,a} = -|x|^{2-a} \Delta + |x|^a$$

となり, この作用素は明らかに球対称性 (回転不変性) を持つ. すると, $e^{-itH_{0,a}}$ を $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の球面調和関数に制限すると,

$$-r^{2-a} \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r + \frac{k(k+n-2)}{r^2} \right) + r^2$$

の形の 1 次元作用素の propagator を考えることになる. この積分核が表示 (3) のベッセル関数の部分 (と (2) の $\frac{e^{i\frac{|x|^a + |x'|^a}{a} \cot(at)}}{(i \sin(at))^{\frac{2\langle k \rangle + n + a - 2}{a}}}$ の部分) に対応すると考えられる.

一方, $H_m : L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ を m 次球面調和関数全体の空間への直交射影作用素とすると, ある m に無関係な定数 c_n が存在して

$$H_m f(\omega) = c_n \left(m + \frac{n-2}{2} \right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} C_m^{\frac{n-2}{2}}(\omega \cdot \omega') f(\omega') d\omega'$$

が成り立つ. $k=0$ の場合を考えると $\nu = \frac{n-2}{2}$ なので, 表示 (3) の $(m+\nu)C_m^\nu$ という部分は球面調和関数への射影 H_m の積分核に由来する.

3. 和 $\mathcal{J}(b, \nu; w; s)$ の有界性

一般の a に対しても分散型評価 (4) が分かれば定理 1 が得られる. そのためには, 和 $\mathcal{J}$ がパラメータ w, s に対して一様有界であることを示せば良い. (2) によって, $w \in i\mathbb{R}$ の場合のみを考察すればよい. つまり, 証明において本質的なのは次の定理を証明することである:

定理 2. $\nu \geq 0$ とする.

(i) $0 < b < 2$ かつ $\varepsilon > 0$ とする. このとき, ある $C_{b,\nu,\varepsilon} > 0$ が存在して

$$|\mathcal{J}(b, \nu; -iy; \cos \varphi)| \leq C_{b,\nu,\varepsilon} (1 + |y|)^{(1-b)\nu} \quad \text{for } y \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, \pi - \varepsilon].$$

が成り立つ. 更に, $b=1$ のときは $\varepsilon=0$ とできる.

(ii) $b > 0$ とすると, $C_{b,\nu} > 0$ が存在して

$$|\mathcal{J}(b, \nu; -iy; \cos \varphi)| \leq C_{b,\nu} (1 + |y|)^{(2-b)\nu} \quad \text{for } y \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, \pi].$$

特に,

- $1 < b < 2$ のとき, $\mathcal{J}(b, \nu; -iy; \cos \varphi)$ は $y \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, \pi - \varepsilon]$ について有界.
- $b=1, b \geq 2$ もしくは $\nu=0$ のとき $\mathcal{J}(b, \nu; -iy; \cos \varphi)$ は $y \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, \pi]$ について有界.

実際には, $1 < a < 2$ ($b = 2/a$ なので $\Leftrightarrow 1 < b < 2$) のときには, (証明したわけではないが) この場合は恐らく分散型評価 (4) は成り立たない. しかし, $k=0$ のときには $x \cdot \hat{x} > -1 + \varepsilon'$ (これが $\varphi \in [0, \pi - \varepsilon]$ と対応する) という外向領域に制限すれば分散型評価が成り立つので, Keel-Tao の定理 (TT^* -method) の証明には積分核の対角線近傍の分散型評価しか必要ないことから, $1 < a < 2$ (かつ $k=0$) の場合も定理 1 が得られる. また, これも証明していないことであるが, 定理 2 の評価は大抵のパラメータに関しては最良だと予想している.

証明の困難さ

Strichartz 評価の証明が単なる和 $\mathcal{J}$ の一様有界性の証明に帰着されることを説明した. しかし, 上記の定理 2 を得るのは容易ではない¹. これを見るために, Bessel 関数と Gegenbauer 多項式の上からの最良評価

$$|J_\mu(y)| \lesssim \begin{cases} y^{-\frac{1}{4}}(y-\mu)^{-\frac{1}{4}} & \text{for } y \gtrsim 1, \mu \in [0, y - y^{\frac{1}{3}}] \\ y^{-\frac{1}{3}} & \text{for } y \gtrsim 1, \mu \in [y - 2y^{\frac{1}{3}}, y + 2y^{\frac{1}{3}}] \\ \mu^{-\frac{1}{4}}(\mu-y)^{-\frac{1}{4}} e^{-\mu \cosh^{-1}(\mu/y) + \sqrt{\mu^2 - y^2}} & \text{for } y \gtrsim 1, \mu \in [y + y^{\frac{1}{3}}, \infty) \end{cases}$$

$$|C_m^\nu(\cos \varphi)| \lesssim m^{2\nu-1}$$

¹ 以下で見るように, b が大きい時にはそれほど難しくない.

を用いて $\mathcal{J}$ を評価してみよう．変形 Bessel 関数の定義から， $y > 0$ に対して，

$$\mathcal{J}(b, \nu; -iy; s) = \Gamma(b\nu + 1) \left(\frac{y}{2}\right)^{-b\nu} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}bmi} J_{b(m+\nu)}(y)(m+\nu)\nu^{-1}C_m^\nu(s)$$

となることに注意する． $\mu(m) := b(m+\nu)$ とおいて上記の最良評価を用いると，

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(b, \nu; -iy; \cos \varphi)| &\lesssim |y|^{-b\nu-\frac{1}{4}} \sum_{\mu(m) \in [0, y-y^{\frac{1}{3}}]} m^{2\nu} (y - \mu(m))^{-\frac{1}{4}} \\ &\quad + |y|^{-b\nu-\frac{1}{3}} \sum_{[y-y^{\frac{1}{3}}, y+y^{\frac{1}{3}}]} m^{2\nu} \\ &\quad + |y|^{-b\nu} \sum_{[y-y^{\frac{1}{3}}, y+y^{\frac{1}{3}}]} m^{2\nu} \mu^{-\frac{1}{4}} (\mu - y)^{-\frac{1}{4}} e^{-\mu \cosh^{-1}(\mu/y) + \sqrt{\mu^2 - y^2}} \end{aligned}$$

が $y \gtrsim 1$ に対して成り立つ．右辺は（ある程度）具体的に計算できて， $(\varphi \in [0, \pi]$ と) $y \gtrsim 1$ に関して最良評価を行えば

$$|\mathcal{J}(b, \nu; -iy; \cos \varphi)| \lesssim (1 + |y|)^{(2-b)\nu + \frac{1}{2}}$$

が得られる．この評価が問題なのは，定理 2(ii) と比べて $(1+|y|)^{\frac{1}{2}}$ だけ評価が悪くなっていることである．このせいで， $\mathcal{J}$ が有界になるためにはパラメータの b の範囲に余計な制限がかかってしまう．実際，今の評価を用いれば $b \geq 2 + 1/(2\nu)$ のときには和 $\mathcal{J}$ は一様に有界であるが，定理 2 の主張は $b \geq 2$ に対して $\mathcal{J}$ が一様に有界である，というもののなので結果としては不十分である．更に前にも述べたように， $b = 1, 2$ のとき（元の問題で $a = 2, 1$ のとき）には $\mathcal{J}$ は $\mathcal{J}(2, \nu; w; t) = \Gamma(1+\nu)(\frac{w}{2})^m \tilde{I}_{\nu+m}(w)$ ， $\mathcal{J}(1, \nu; w; t) = e^{wt}$ と具体的に表されてこれらは $w \in i\mathbb{R}$ に関して一様有界なので，この方針では $\mathcal{J}$ に関する最良評価を得られていないことがわかる．

問題点

先に述べた方針の問題点は三角不等式

$$\left| \sum \cdot \right| \leq \sum |\cdot|$$

を用いた点にある．実際，三角不等式を用いた後は最良な評価しか行っていないので，最終的な評価が悪くなっているとすれば，この部分に原因があるとは考えられない．

一般に，三角不等式が最良でないとき，その原因は各項の間の打ち消しを考慮していないことにある．例えば，三角不等式を用いれば $|1-1| \leq 1+1=2$ であるが，左辺は 0 なのでこの不等式は全く最良ではない．（程度の違いはあれ）これと同様のことが起きてしまっていたが故に， $\mathcal{J}$ の評価が悪くなってしまったのである．今の場合， $\mathcal{J}$ の和の中身は

$$e^{-\frac{\pi}{2}bmi} J_{b(m+\nu)}(y)(m+\nu)\nu^{-1}C_m^\nu(s) \quad (5)$$

という特殊関数の積で表される関数であり， m に関する和を考えたときにそれらの打ち消しを考える必要がある．これが本研究の主眼である．

振動効果の抽出

そこで、以下のようにして和の各項間の打ち消しを抽出する：

- まず、Bessel 関数 J と Gegenbauer 多項式 C を振動する項と（振幅）の積の形で書いて（特殊関数論）でそれらをまとめることで、(5) を

$$e^{iS(m)}\zeta(m)$$

の形で書く．ここで、 $e^{iS(m)}$ が $(m \rightarrow \infty)$ で振動する項であり、 $\zeta(m)$ は「あまり振動しない」項（振幅，amplitude）である．また、実数値関数 S は位相関数（phase function）とも呼ばれる．

- すると、 $\sum_m e^{iS(m)}\zeta(m)$ の形の離散和を評価すれば良いことがわかった．しかし、離散和に関して振動効果を抽出するのは難しいので、連続和で考える．つまり、和を積分の形で書くことにする．
- 和を積分の形で書くために、

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{iS(m)}\zeta(m) = \int_{\mathbb{R}} e^{iS(m)}\zeta(m)dm - \frac{1}{2\pi i} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} e^{i(S(m)+2\pi qm)}\tilde{\zeta}(m)dm,$$
$$\tilde{\zeta}(m) := \zeta'(m) + iS'(m)\zeta(m)$$

という形の公式を用いる． $S(m)$ に関して適当な増大度の条件を課せば²、右辺の q に関する和は有限項を除いて無視できる．

- 実際には S や ζ はパラメータ y に依っていて、和の y に関する増大度を調べたいわけであるが、 y を用いて積分 $\int_{\mathbb{R}} e^{iS(m)}\zeta(m)dm$ を変数変換すれば、（適当に領域を分割すると）これは有限区間の積分になり、 y を large parameter に持つ振動積分の形になる．すると、**定常位相法**を用いれば、 S の高階微分がどの程度消えるか見ることによって、和がどの程度大きくなるか正確に評価することができる．

実際、Ionescu-Jerison の論文 [5] では、この方針に基づいて $-\Delta - 1$ のある種の逆作用素を構成し Carleman 評価を得ている．しかし、彼らの論文では明示的に定常位相法を用いておらず、2 進分解と部分積分に基づいて振動効果を抽出していた．この方法はある意味初等的である一方、計算が非常に煩雑であり非常に難解なものであった³．ここでは、定常位相法を陽に用いることによって証明を簡単化し、証明の指針を立てやすくした．

[5] とのもう一つの違いは、特殊関数 J や C の振幅部分の高階微分の評価が必要になることである．特に、[5] では Bessel 関数の振幅の 2 階微分までの評価を行っていたが、彼らの手法は高階微分の場合には適用できなかったので、（積分路の変形に関する）最急降下法と定常位相法を組み合わせ高階微分の評価も行った．

² 今回の場合は問題ない．

³ 彼らの論文の主結果はこの分野のブレイクスルーの 1 つで、様々な論文に引用されている．しかし、mathscinet の引用文献を見る限り、彼らの手法を真似して書いた論文は見当たらなかった．

4. 他の問題への応用

ここで用いた手法は、他の問題へも応用できると考えている.

- Christianson[3] は多様体 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ 上で $g = dr^2 + (1 + r^{2m})^{\frac{1}{m}} d\omega^2$ の形の Riemann 計量を考え, 対応する $e^{it\Delta_g}$ に関する Strichartz 評価を証明した⁴. しかし, そこでは初期値がある次数の球面調和関数の空間に射影されている場合のみを考えている.
- Donninger-Schlag-Soffer[4] は Schwartzschild 時空中の波動方程式の分散型評価⁵ を証明した. Schwartzschild 時空も球対称性を持つので, 球面方向の固有値に関して分解してそれぞれで考えればよいが, [3] の場合と同様に [4] でも初期値がある次数の球面調和関数の空間に射影されている場合のみを考えている.
- Kato-Nakahashi-Tadano[6] では, シュレディンガー作用素 $-\Delta + V(x)$ の基本解を考え, V が球対称かつ無限遠点で十分速く増大するときに, $e^{-it(-\Delta+V)}$ の積分核が滑らかにならないことを証明した. そこでは, 球面方向の振動数 (固有値) を固定した議論をしている影響で, 得られた結果が (先行研究の 1 次元の結果と比べて) 幾分か弱くなっている.

これらの問題の共通点は, 球対称性から (2), (3) と似たような形の積分核を持ち, 球面方向への射影 H_m から来る項は Gegenbauer 多項式の形になっている点, どの問題も球面の固有値に関する足し合わせについて考慮していないという点にある. 今回の手法はこれらの問題の解決の手がかりになるのではないかと考えている.

参考文献

- [1] S. Ben Saïd, T. Kobayashi and B. Ørsted, Laguerre semigroup and Dunkl operators. *Compos. Math.* **148** (2012), no. 4, 1265–1336.
- [2] S. Ben Saïd, Strichartz estimates for Schrödinger-Laguerre operators. *Semigroup Forum* **90** (2015), 251–269.
- [3] H. Christianson, Near sharp Strichartz estimates with loss in the presence of degenerate hyperbolic trapping. *Comm. Math. Phys.* **324** (2013), no.3, 657–693.
- [4] R. Donninger, W. Schlag, A. Soffer, On pointwise decay of linear waves on a Schwarzschild black hole background. *Comm. Math. Phys.* **309** (2012), no.1, 51–86.
- [5] A. D. Ionescu, D. Jerison, On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials. *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 5, 1029–1081.
- [6] K. Kato, W. Nakahashi, Y. Tadano, Non-smoothness of the fundamental solutions for Schrödinger equations with super-quadratic and spherically symmetric potential, *J. Math. Phys.* **65**, 071506 (2024).
- [7] M. Keel, T. Tao, Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.* **120** (1998), no. 5, 955–980.
- [8] T. Kobayashi, G. Mano, Integral formulas for the minimal representation of $O(p, 2)$, *Acta Appl. Math.* **86** (2005), no. 1-2, 103–113.
- [9] K. Taira, H. Tamori, Strichartz estimates for the (k, a) -generalized Laguerre operators with general parameters, arXiv:2308.16815.

⁴ この計量に関する測地流は退化した双曲測地線を 1 つだけ持つ多様体で, その退化次数に応じて平滑化のロスがあることが示されている.

⁵ 相対性理論の文脈では Price’s law と呼ばれている.