

p ラプラス関数の固有関数による 完全楕円積分とルジャンドル関係式の一般化

竹内 慎吾 (芝浦工大)*

本研究は鈴木風氏 (芝浦工大 M2) との共同研究である。

完全楕円積分はヤコビ楕円関数とともに非線形微分方程式の厳密解を表現する際に有効な積分量である (例えば固有値問題 [1], 非局所境界値問題 [4], 弾性曲線の問題 [3, 6] など)。本研究では p ラプラス関数を伴う方程式への応用を見据えたその一般化を考える。

第 1 種, 第 2 種の完全楕円積分

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

は“ルジャンドル関係式”を満たすことがよく知られている: 任意の $k \in (0, 1)$ に対して,

$$E(k)K(\sqrt{1 - k^2}) + K(k)E(\sqrt{1 - k^2}) - K(k)K(\sqrt{1 - k^2}) = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

完全楕円積分を, 一般化三角関数を用いて次のように一般化する ([5]): $p, q, r > 1$ とし, 任意の $k \in [0, 1)$ に対して,

$$K_{p,q,r}(k) := \int_0^{\pi_{p,q}/2} \frac{d\theta}{(1 - k^q \sin_{p,q}^q \theta)^{1-1/r}}, \quad E_{p,q,r}(k) := \int_0^{\pi_{p,q}/2} (1 - k^q \sin_{p,q}^q \theta)^{1/r} d\theta.$$

ここで, 一般化三角関数 $\sin_{p,q} \theta$ と一般化円周率 $\pi_{p,q}$ は, 初期値問題

$$\frac{d}{d\theta} \left(\left| \frac{du}{d\theta} \right|^{p-2} \frac{du}{d\theta} \right) + \frac{(p-1)q}{p} |u|^{q-2} u = 0, \quad u(0) = 0, \quad \frac{du(0)}{d\theta} = 1$$

の一意解 (周期関数) とその半周期である。これらは p ラプラス関数の固有値と固有関数を表す際によく用いられる。特に $\sin_{2,2} \theta = \sin \theta$, $\pi_{2,2} = \pi$ である。したがって, $K_{2,2,2}(k) = K(k)$, $E_{2,2,2}(k) = E(k)$ である。

B をベータ関数とし, $1/s^* := 1 - 1/s$ ($s > 1$) とする。次が成り立つ。

定理 1 ([5]). 任意の $k \in (0, 1)$ に対して, $k' := (1 - k^q)^{1/r}$ とするとき,

$$E_{p,q,r}(k)K_{p,r,q}(k') + K_{p,q,r}(k)E_{p,r,q}(k') - K_{p,q,r}(k)K_{p,r,q}(k') = \frac{\pi_{p,q}}{2r} B \left(\frac{1}{p^*} + \frac{1}{q}, \frac{1}{r} \right). \quad (2)$$

特に $p = q = r = 2$ の場合, (2) は (1) と一致する。

*e-mail: shingo@shibaura-it.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:22K03392) の助成を受けたものである。

[5] による定理 1 の証明は, (2) の左辺の意味が不明であった. ここではその意味も含めた別証明を与える. 以下, $K'_{p,r,q}(k) := K_{p,r,q}(k')$, $E'_{p,r,q}(k) := E_{p,r,q}(k')$ とし,

$$y_1(k) := K_{p,q,r}(k), \quad y_2(k) := k^{q/p-1}(k')^{1-r/p} K'_{p,r,q}(k)$$

と定義する. さらに, y_1, y_2 のロンスキアンを $W(y_1, y_2; k)$ で表し, (2) の左辺の関数を $L(k)$ で表す. また証明に必要な定数 α を導入する:

$$W(y_1, y_2; k) := y_1(k) \frac{dy_2(k)}{dk} - \frac{dy_1(k)}{dk} y_2(k), \quad \alpha := \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p},$$

$$L(k) := E_{p,q,r}(k) K'_{p,r,q}(k) + K_{p,q,r}(k) E'_{p,r,q}(k) - K_{p,q,r}(k) K'_{p,r,q}(k).$$

補題 1. 次が成り立つ.

$$\frac{dK_{p,q,r}(k)}{dk} = \frac{-(\alpha q - k^q) K_{p,q,r}(k) + \alpha q E_{p,q,r}(k)}{k(k')^r}, \quad \frac{dE_{p,q,r}(k)}{dk} = \frac{q(-K_{p,q,r}(k) + E_{p,q,r}(k))}{rk},$$

$$\frac{dK'_{p,r,q}(k)}{dk} = \frac{q((\alpha r - (k')^r) K'_{p,r,q}(k) - \alpha r E'_{p,r,q}(k))}{rk(k')^r}, \quad \frac{dE'_{p,r,q}(k)}{dk} = \frac{k^{q-1}(K'_{p,r,q}(k) - E'_{p,r,q}(k))}{(k')^r}.$$

補題 2. y_1, y_2 はともに次の方程式の解である:

$$k(k')^r \frac{d^2 y}{dk^2} + \left(2 - \frac{q}{p} - \left(2 + \frac{q}{r^*} \right) k^q \right) \frac{dy}{dk} - \frac{q}{r^*} k^{q-1} y = 0.$$

補題 3. ある定数 C が存在し, 任意の $k \in (0, 1)$ に対して,

$$W(y_1, y_2; k) = \frac{C}{k^{2-q/p}(k')^{r/p+r-1}}.$$

補題 4. 任意の $k \in (0, 1)$ に対して,

$$W(y_1, y_2; k) = -\frac{\alpha q L(k)}{k^{2-q/p}(k')^{r/p+r-1}}.$$

定理 1 の証明の概略. 補題 3 と補題 4 より, $\alpha L(k)$ は定数である. $\alpha \neq 0$ の場合, $L(k)$ は定数である. $\alpha = 0$ の場合, 補題 1 の第 1 式と第 3 式から $K_{p,q,r}(k)$ と $K'_{p,r,q}(k)$ が求まり, 第 2 式と第 4 式にそれらを代入した式により, $dL(k)/dk = 0$ が直ちに示される. よって α によらず $L(k)$ は定数である. その値は $\lim_{k \rightarrow +0} L(k)$ を計算して得られる. $\square$

系 1. 「 y_1, y_2 が一次従属」 $\Leftrightarrow$ 「 $\alpha = 0$, すなわち $1/q + 1/r = 1/p$ 」

注意 1. (2) はガウスの超幾何級数に関する“エリオット恒等式”(例えば [2] を参照) と同値であることがわかる.

参考文献

- [1] S. Aizawa, Y. Miyamoto and T. Wakasa, J. Elliptic Parabol. Equ. **9** (2023), no. 2, 1043–1070.

- [2] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. K. Vuorinen, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat. **83** (2001), 5–26.
- [3] T. Miura and K. Yoshizawa, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **203** (2024), no. 5, 2319–2356.
- [4] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, and S. Yotsutani, Discrete Contin. Dyn. Syst. **40** (2020), no. 8, 4907–4925.
- [5] S. Takeuchi, J. Class. Anal. **9** (2016), no. 1, 35–42.
- [6] K. Watanabe, Kodai Math. J. 37 (2014), no. 2, 453–474.