

# Snapshot problem for the wave equation

寛 知之 (筑波大学数学域)

**Abstract.** 本講演では、 $m$  個の時刻  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$  において波のスナップショットを取り、それら  $m$  個のスナップショットから任意時刻での波の形を構成出来るか？という問題を考える。より正確には、 $m$  個の時刻  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ 、および、それらの時刻での解のデータ  $u|_{t=t_1} = f_1, \dots, u|_{t=t_m} = f_m$  を与え、以下の問題 (SP) を考える。

$$(SP) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=t_1} = f_1, \dots, u|_{t=t_m} = f_m. \end{cases}$$

上記において、 $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  であり、これらの関数達に遠方での減衰条件などは一切仮定しない。

上記の問題 (SP) を波動方程式に対するスナップショット問題と呼ぶことにする。そして、これら  $m$  個の関数の組  $\{f_1, \dots, f_m\}$  をスナップショットデータと呼ぶことにする。本講演では、(SP) がどのような場合に一意解を持つか？という問題を考えよう。

良く知られているように、波動方程式に対するコーシー問題

$$(CP) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = f_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = g_0. \end{cases}$$

の解は一意に存在する。即ち、コーシーデータとなる 2 個の関数  $f_0, g_0$  を与えれば、(CP) の解は一意に存在する。

では、スナップショット問題においても、2 個の時刻でスナップショットを取れば一意解が存在するだろうか？実は、それほど単純な話ではなく、最低でも 3 個の時刻でスナップショットを取る必要が生じる。より詳しく、本講演での主結果は以下の通りである。

- (1)  $m = 2$  の場合、(SP) の解の一意性は成立しない。
- (2)  $m = 3$  の場合で、 $(t_3 - t_1)/(t_2 - t_1)$  が無理数の場合、(SP) の解は一意である。
- (3)  $m = 3$  の場合で、 $(t_3 - t_1)/(t_2 - t_1)$  が無理数かつリュービル数ではない場合。更にスナップショットデータ  $\{f_1, f_2, f_3\}$  にある種の両立条件を仮定すると、(SP) の解は一意に存在する。

もし時間の余裕があれば、上記の結果の幾つかの一般化についても述べる。尚、本講演は Jens Christensen, Fulton Gonzalez, Jue Wang 以上 3 氏との共同研究に基づいている。