ディリクレ境界条件を伴う反応拡散方程式の自由境界問題に現れる伝播現象

兼子 裕大（関東学院大学理工学部）

1 はじめに

本講演は山田義雄名誉教授（早稲田大学理工学術院）との共同研究に基づくものである。次の反応拡散方程式の自由境界問題について考える：

$$
\text{(FBP)} \quad \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0,\ 0 < x < h(t), \\ u(t,0) = u(t,h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0,\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le h_0. \end{cases}
$$

ただし, d, μ, h_0 は正定数とする。また, 初期関数 $u_0(x)$ は次をみたす関数である：

$$
u_0 \in C^2([0,h_0]),\ u_0(0) = u_0(h_0) = 0,\ u_0(x) > 0 \text{ in } (0,h_0).
$$

(FBP) は $x = 0$ でノイマン条件かつ $f(u) = u(a - bu)$ の場合に, 新種や外来種などの生物個体の侵入・拡散を表すモデルとして Du-Lin [1] によって提唱された。問題において，２つの未知関数 $u(t,x)$, $h(x)$ はそれぞれ生物の個体数密度と生息領域 $(0,h(t))$ の境界 (=侵入の前線) を表す。このモデルでは, 時間無限大における解の漸近挙動である Spreading（分布拡大）と Vanishing（個体絶滅）によって現象を説明する。

本研究では, 非線形項は正値双安定項（positive bistable nonlinearity）と仮定する：

$$
\begin{aligned}
&f \in C^1[0,\infty),\ f(0) = f(u_1^*) = f(u_2^*) = f(u_3^*) = 0 \ \text{ with } \ 0 < u_1^* < u_2^* < u_3^*, \\
&f(u) > 0 \ \text{ for } \ u \in (0,u_1^*) \cup (u_2^*,u_3^*), \quad f(u) < 0 \ \text{ for } \ u \in (u_1^*,u_2^*) \cup (u_3^*,\infty), \\
&f'(0) > 0,\ f'(u_1^*) < 0,\ f'(u_2^*) > 0,\ f'(u_3^*) < 0,\ \int_{u_1^*}^{u_3^*} f(u)\, du > 0.
\end{aligned}
$$

先行研究として, Endo-K.-Yamada [2] では正値双安定項の場合に, 解の漸近挙動が Big Spreading, Small Spreading, Vanishing の 3 通りに分類されることが示された。

2 主結果

解の漸近挙動について, 先行研究における Small Spreading がボーダーライン挙動（Transition）を含んでいることが分かった。詳しい分類結果は以下のようになる。

定理 1 (K.-Yamada [4])**.** (FBP) の解 (u,h) について, $t \to \infty$ で次のいずれかが成立する：

(i) Big Spreading: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty,\ \lim_{t\to\infty} u(t,x) = v_3^*(x)$ locally uniformly in $[0,\infty)$,
$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{C(0,h(t))} = u_3^*$;

(ii) Transition: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty,\ \lim_{t\to\infty} u(t,x) = v_1^*(x)$ locally uniformly in $[0,\infty)$,
$\|u(t,\cdot)\|_{C(0,h(t))} > u_2^*$ for all $t > 0$;

(iii) Small Spreading: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty,\ \lim_{t\to\infty} u(t,x) = v_1^*(x)$ locally uniformly in $[0,\infty)$,
$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{C(0,h(t))} = u_1^*$;

(iv) Vanishing: $\lim_{t\to\infty} h(t) \le \pi\sqrt{d/f'(0)},\ \lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{C(0,h(t))} = 0.$

ただし, $v_1^*(x) < v_3^*(x)$ in $(0, \infty)$ であり, $v_1^*(x)$ (resp. $v_3^*(x)$) は次の問題の解である：

$$\text{(SP)} \quad \begin{cases} dv_{xx} + f(v) = 0, \quad v > 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < \infty, \\ v(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} v(x) = u_1^* \ (resp.\ u_3^*). \end{cases}$$

定理 2 は, 定理 1 で与えられたボーダーライン挙動（Transition）に関する十分条件を示す。もし $\sigma_2^* = \sigma_3^*$ となれば, Transition は 2 つの Spreading のボーダーラインである。

定理 2 (K.-Yamada [4])**.** ある関数 ϕ とパラメータ $\sigma > 0$ に対して, 初期関数を $u_0 = \sigma\phi$ とおく。このとき, ある定数 $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^* \geq 0$ ($\sigma_1^* < \sigma_2^* \leq \sigma_3^*$) が存在し, $t \to \infty$ のとき次が成立する：

- σ_3^* が有限値のとき, $\sigma \in (\sigma_3^*, \infty)$ ならば, Big Spreading;
- $\sigma \in [\sigma_2^*, \sigma_3^*]$ ならば, Transition;
- $\sigma \in (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ ならば, Small Spreading;
- $\sigma \in [0, \sigma_1^*]$ ならば, Vanishing.

さらに, もし $h_0 < \pi\sqrt{d/f'(0)}$ ならば $\sigma_1^* > 0$, もし $h_0 \geq \pi\sqrt{d/f'(0)}$ ならば $\sigma_1^* = 0$, もし h_0 が十分大きければ, $\sigma_3^* < \infty$ である。

ノイマン型の自由境界問題において, ある正定数 μ^* に対して

$$\mu \geq \mu^*, \quad c_0 > c^* \tag{1}$$

のとき, Big spreading の解がテラス形状に収束することが証明された（K.-Matsuzawa-Yamada [3]）。ここで, c_0 は f の単安定部分に対応する進行波の最小速度, c^* は f の双安定部分に対応する進行波 Q^* の速度である。(FBP) に対しては, 次のようなテラス形状への収束が得られた。

定理 3 (K.-Yamada [4])**.** 条件 (1) を仮定する。(FBP) の解 $(u(t,x), h(t))$ が Big Spreading のとき, ある定数 H_S, $H_B \in \mathbb{R}$ が存在し, $c_1 \in (0, c^*)$ and $c_2 \in (c^*, c_S(\mu))$ に対して, 以下が成立する：

- $\lim_{t\to\infty} [h(t) - c_S(\mu)t] = H_S, \quad \lim_{t\to\infty} h'(t) = c_S(\mu),$
- $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,c_1t]} |u(t,x) - v_3^*(x)| = 0,$
- $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[c_1t,c_2t]} |u(t,x) - Q^*(c^*t + H_B - x)| = 0,$
- $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[c_2t,h(t)]} |u(t,x) - q_S(h(t) - x)| = 0.$

ただし, $(q_S, c_S(\mu))$ は f の単安定部分に対応する Semi-wave 問題の解である。

参考文献

[1] Y. Du and Z. Lin, *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*, SIAM J. Math. Anal., **42** (2010), 377–405.

[2] M. Endo, Y. Kaneko and Y. Yamada, *Free boundary problem for a reaction-diffusion equation with positive bistable nonlinearity*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **40** (2020), 3375–3394.

[3] Y. Kaneko, H. Matsuzawa and Y. Yamada, *Asymptotic profiles of solutions and propagating terrace for a free boundary problem of nonlinear diffusion equation with positive bistable nonlinearity*, SIAM J. Math. Anal., **52** (2020), 65–103.

[4] Y. Kaneko and Y. Yamada, *Borderline behavior and propagating terrace for a free boundary problem with positive bistable nonlinearity under Dirichlet boundary conditions*, submitted.