MODIFIED SCATTERING FOR THE 1D CUBIC NLS WITH LONG-RANGE POTENTIAL

水谷 治哉 (大阪大学)

本講演は川本昌紀氏 (岡山大学) との共同研究に基づく．次のポテンシャルを伴う非線形 Schrödinger 方程式の終値問題に対する解の漸近挙動を考察する：

$$i\partial_t u - Hu = F(u), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{NLS}$$

ここで $H = H_0 + V$, $H_0 = -\Delta$, $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $F(u) = \lambda |u|^{2/d} u$, $\lambda \in \mathbb{R}$. V の典型例は

$$V(x) = Z\langle x\rangle^{-\rho}\ (Z \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ 1/2 < \rho \le 1).$$

非線形項 $F(u)$ は時刻無限大での解の漸近挙動に関して臨界であり, (適当な条件の下で) 自由解 $e^{-itH_0}u_+$ に漸近する解は自明なものに限られる．さらに $V \equiv 0$ かつ $d \le 3$ のとき, 十分小さな解は自由解に位相の修正を加えた漸近形 (修正自由解ともいう) に散乱することが, 終値問題と初期値問題のどちらにおいても知られている ([7, 2, 3, 4] など)．これを修正散乱という．また, 線形の場合 ($\lambda = 0$) にも, 上の例を含む減衰の遅いポテンシャルに対して, 修正散乱の結果が多数ある ([1])．このように, 解の (散乱する部分の) 時刻無限大の漸近形に影響を与えるものを長距離型, そうでないものを短距離型と呼ぶ．この講演では, 非線形項とポテンシャルのどちらも長距離型の場合に, 空間 1 次元において (NLS) の終値問題に対する修正散乱を考察した結果 [6] を紹介する．以下, $d = 1$ とする．

V は $V = V^{\mathrm{S}} + V^{\mathrm{L}} + V^{\mathrm{C}}$ と実数値関数の和に分解できて, 次を満たすとする：

- 短距離ポテンシャル：$V^{\mathrm{S}} \in C^1(\mathbb{R})$. ある $\rho_{\mathrm{S}} > 3/2$ があって

$$|V^{\mathrm{S}}(x)| + |(V^{\mathrm{S}})'(x)| \lesssim \langle x\rangle^{-\rho_{\mathrm{S}}}$$

- 長距離ポテンシャル: $V^{\mathrm{L}} \in C^3(\mathbb{R})$. ある $\rho_{\mathrm{L}} > 1/2$ があって,

$$|(V^{\mathrm{L}})^{(k)}(x)| \lesssim \langle x\rangle^{-\rho_{\mathrm{L}}-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

- 特異ポテンシャル: $V^{\mathrm{C}} \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} V^{\mathrm{C}}$ はコンパクト．

(NLS) に対する漸近形 u_{p} を次で定める：

$$u_{\mathrm{p}}(t,x) = [\mathcal{M}_\Psi(t)\mathcal{D}(t)w_{\mathrm{p}}](t,x) = (it)^{-1/2} e^{i\Psi(t,x)} e^{-i\lambda|\widehat{u_+}(x/t)|^2 \log|t|}\widehat{u_+}(x/t).$$

ここで u_+ を与えられたデータ, $w_{\mathrm{p}}(t,x) = e^{-i\lambda|\widehat{u_+}(x)|^2 \log|t|}\widehat{u_+}(x)$,

$$\mathcal{D}(t)f(x) = (it)^{-1/2} f(x/t), \quad \mathcal{M}_\Psi(t)f(x) = e^{i\Psi(t,x)} f(x).$$

$\Psi \in C^1([1,\infty) \times \mathbb{R}) \cap C([1,\infty); C^3(\mathbb{R}))$ は以下を満たす相関数：

- Hamilton–Jacobi 方程式：$-\partial_t \Psi(t,x) = \frac{1}{2}|\partial_x \Psi(t,x)|^2 + V^{\mathrm{L}}(x)$ for $|x| \ge c_0 t/4$
- $\partial_x^k\Big(\Psi(t,x) - \dfrac{x^2}{2t}\Big) = O(\langle t\rangle^{1-\rho'_{\mathrm{L}}-\min\{k,2\}})$ for $k = 1, 2, 3$, $\rho'_{\mathrm{L}} < \rho_{\mathrm{L}}$

V がない場合, $\Psi = \frac{x^2}{2t}$ と取れる．このとき u_{p} は小澤 [7] の漸近形と一致する．一方, 線形の場合 ($\lambda = 0$), u_{p} は Yafaev [8] のものと一致する．この意味で, 上記の u_{p} は線形・非線形修正散乱におけるそれぞれの漸近形を組み合わせたものである．

定理 1. $d=1$, $c_0>0$ とする. また $\delta\le 1$ かつ $1/2<\delta<\min\{\rho_{\mathrm{L}},\rho_{\mathrm{S}}-1\}$, $b>2$ とする. このとき, 任意の $u_+\in H^{1,2\delta}(\mathbb{R})$ で $\|\widehat{u_+}\|_{L^\infty}\ll 1$ かつ $\mathrm{supp}\,\widehat{u_+}\subset\{|\xi|\ge c_0\}$ なるものに対して, 次の漸近挙動を満たす (NLS) の解 $u\in C(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}))$ が唯一つ存在する：

$$\|u(t)-u_{\mathrm{p}}(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\lesssim t^{-\delta}(\log t)^b,\quad t\to\infty. \tag{1.1}$$

ここで $H^{s,t}(\mathbb{R})=\langle D\rangle^{-s}\langle x\rangle^{-t}L^2(\mathbb{R})$ は重み付き Sobolev 空間である.

注意. (1) $d=2,3$ の場合は [5] で考察している. このときは, e^{-itH} に対する (時間大域的) Strichartz 評価を用いていたため, V に斥力型 (≒ 正値かつ動径方向に単調減少) という強い条件を課していたが, 今回は必要ない. 特に, H は一般には負の固有値やゼロ共鳴状態を持つ. なお, V が斥力型であっても, 空間 1 次元で長距離ポテンシャルを伴う場合の e^{-itH} に対する Strichartz 評価は未解決である. (2) 条件 $\mathrm{supp}\,\widehat{u_+}\subset\{|\xi|\ge c_0\}$ は技術的なものと思われる. 実際, 非線形項あるいはポテンシャルのみの場合には必要ない.

定理 1 の証明は, 相関数 Ψ の構成, (NLS)–(1.1) に対応する積分方程式の導出, エネルギー評価からなる. Ψ の構成には古典力学を用いる. 次に, 形式的に u を (NLS)–(1.1) の滑らかな解とする. w_{p} が満たす ODE などを用いると, 次の積分方程式が得られる：

$$u(t)=u_{\mathrm{p}}(t)+E_1(t)+i\int_t^\infty e^{-i(t-s)H}\left(F(u)-F(u_{\mathrm{p}})+E_2+E_3\right)(s)ds. \tag{IE}$$

ここで, $U_\Psi(t)=\mathcal{M}_\Psi(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}\mathcal{M}(t)$, $\mathcal{M}(t)=e^{i|x|^2/(2t)}$, $\mathcal{R}(t)=\mathcal{F}(\mathcal{M}(t)-1)\mathcal{F}^{-1}$ とするとき

$$\begin{aligned}
E_1(t)&=(1-\chi_t)\mathcal{M}_\Psi(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{R}(t)w_{\mathrm{p}}(t)\\
E_2(t)&=-t^{-1}(1-\chi_t)\mathcal{M}_\Psi(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{R}(t)F(w_{\mathrm{p}}(t)),\\
E_3(t)&=-e^{-itH}[i\partial_t,e^{itH}(1-\chi_t)U_\Psi(t)\mathcal{F}^{-1}]w_{\mathrm{p}}(t)
\end{aligned}$$

$1-\chi_t$ は低速部分 $\{|x|\le c_0t\}$ を取り除くカットオフ, $[A,B]=AB-BA$ は交換子である. [5] では e^{-itH} に対する Strichartz 評価を用いて (IE) を L^2 で解いたが, 今回はより単純に, ほぼ Sobolev 埋め込み $H^1(\mathbb{R})\subset L^\infty(\mathbb{R})$ のみを用いて, (IE) をエネルギー空間

$$X=\{f\in C([T,\infty);H^1(\mathbb{R}))\mid \|f\|_X=\sup_{t\ge T}t^\delta(\log t)^{-b}\|f\|_{H^1}\le R\}\quad (T\gg 1, R>0)$$

において解く. $E_1,E_2,F(u)-F(u_{\mathrm{p}})$ のエネルギー評価は [7, 4] とほぼ同じである. 一方, E_3 のエネルギー評価に Ψ の性質を本質的に用いる. (IE) の解 $u\in C([T,\infty);H^1(\mathbb{R}))$ が得られれば, (NLS) の初期値問題を負の時間方向に解くことで $u\in C(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}))$ を得る.

References

[1] J. Dereziński, C. Gérard, *Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems*, Texts and Monographs in Physics (Springer, Berlin, 1997).

[2] J. Ginibre, T. Ozawa. *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n\ge 2$*, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[3] N. Hayashi, P. I. Naumkin, *Asymptotics in large time of solutions to nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[4] N. Hayashi, P. I. Naumkin, *Domain and range of the modified wave operator for Schrödinger equations with a critical nonlinearity*, Commun. Math. Phys. **267** (2006), 477–492.

[5] M. Kawamoto, H. Mizutani, *Modified scattering for nonlinear Schrödinger equations with long-range potentials*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society. `arXiv:2308.13254`

[6] M. Kawamoto, H. Mizutani, *Modified scattering for the cubic nonlinear Schrödinger equation with long-range potentials in one space dimension*, preprint. `https://arxiv.org/abs/2412.16872`

[7] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Commun. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[8] D. R. Yafaev, *Wave operators for the Schrödinger equation*, Teoreticheskaya i Math., Fizika, **45** (1980), 224–234.