

Refined bilinear Strichartz estimates and application to generalized KdV type equations on the line

田中 智之 (横浜国立大学 工学研究院)*

本講演の内容は, Luc Molinet 氏 (Université de Tours) との共同研究に基づく. 次の一般化 KdV 型方程式の初期値問題を考える:

$$\partial_t u + \partial_x D_x^\alpha u + \partial_x (u^{k+1}) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

ここで, $\alpha \in [1, 2]$, $\widehat{D}_x = |\xi|$, $k \in \mathbb{N}$. また, $u_0(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数, $u(t, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数である. 方程式 (1) のクラスは, KdV 方程式 ($\alpha = 2, k = 1$) や, Benjamin-Ono 方程式 ($\alpha = 1, k = 1$) を含む. 本研究の目的は, 広いクラスの方程式に対する初期値問題の適切性と, 無条件一意性 (つまり解の $C([0, T]; H^s)$ での一意性) を証明することである. 本研究での主な興味の対象は $k \geq 3$ の場合であり, この場合は相互作用を表す位相関数が因数分解できないため解析が難しい.

$k \geq 3$ の場合の方程式 (1) に対する先行研究を述べる. $\mathbb{R}$ 上では最近 [1] によって $\alpha \in (1, 2]$ かつ $k \geq 4$ の場合にスケール臨界空間である $H^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{k}}(\mathbb{R})$ における適切性が証明された. 無条件一意性については, $H^{1-\frac{\alpha}{4}}(\mathbb{R})$ での結果が [3] によって報告されている (ただし $\alpha = 2$ のときは $H^{\frac{1}{2}+}(\mathbb{R})$).

本研究では, 初期値問題 (1)–(2) を扱い, 次の結果を得た. まず, $\alpha \in [1, 2]$ に対して, $s(\alpha)$ を次のように定める:

$$s(\alpha) = \begin{cases} \frac{5-2\alpha}{4}, & \alpha \in [1, \frac{3}{2}), \\ \frac{1}{2}, & \alpha \in [\frac{3}{2}, 2]. \end{cases}$$

定理 1. このとき, 初期値問題 (1)–(2) は $s > s(\alpha)$ に対して, $H^s(\mathbb{R})$ において時間局所適切である. 更に, 無条件一意性が成立する.

主定理は $k \in \mathbb{N}$ の値によらず成立するが, $k \geq 3$ の場合に無条件一意性を示した点新しい. その証明では, 解のアプリオリ評価を低い正則性で示すことが重要である. 非共鳴な非線形相互作用には振動効果を利用し ([4]), 共鳴な相互作用には Strichartz 型の評価を用いる ([2]). 講演では, 双線形 Strichartz 評価の導出とその応用について説明したい.

参考文献

- [1] L. Campos, F. Linares and T. S. R. Santos, arXiv:2410.17217.
- [2] H. Koch and N. Tzvetkov, Int. Math. Res. Not. IMRN, **26** (2003), 1449–1464.
- [3] L. Molinet and T. Tanaka, arXiv:2207.08725v2.
- [4] L. Molinet and S. Vento, Anal. PDE **8** (2015), 1455–1495.

* e-mail: tanaka-tomoyuki-fp@ynu.ac.jp