非線形消散項をもつ1次元波動方程式の解の減衰評価について *

若狭恭平 (室蘭工業大学) †

1 Introduction

次の非線形消散項をもつ波動方程式の初期値問題について考察する：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + |\partial_t u|^{p-1}\partial_t u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), \partial_t u(0,x) = \varepsilon g(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $p > 1$, $n \geq 1$ とする. f, g は 十分滑らかな関数で, コンパクト台をもつと仮定し, $\varepsilon > 0$ はパラメータとする.

本講演の目的は, (1.1) の解の各点的な評価とエネルギー評価を導出することである. 解の各点評価を得ることとは, 波の特性方向の因子である, $t+|x|$ あるいは $t-|x|$ に関する減衰評価を導出することである. このような評価を導出することは, 解の主要部が時空間上のどこにあるかが明示的になり, 特に非線形問題を解析する場合には重要である. 他方エネルギー評価については, 方程式 (1.1) がもっている消散構造から, エネルギーの減衰が期待されるため, どのような非線形指数 p と空間次元 n について減衰が起こるのかといった問題がある. 以上のことを詳しく説明するため, 初期値問題 (1.1) の背景について以下述べる.

(1.1) の解のエネルギー $E(t)$ を

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\partial u(t,x)|^2\, dx, \tag{1.2}$$

で定義する. ここで, $\partial = (\partial_t, \nabla_x)$ である. 方程式 (1.1) に対するエネルギー空間における解の大域的適切性は, Lions-Strauss [7] によって示されている.

*片山 聡一郎氏 (大阪大学) と Borislav Yordanov 氏 (ブルガリア・科学アカデミー) との共同研究の内容 [5] に基づく

†e-mail: wakasa@muroran-it.ac.jp

方程式に $\partial_t u$ を掛け, $[s,t]\times\mathbb{R}^n$ 上で積分することで, 次のエネルギー等式が得られる.

$$E(t)=E(s)-\int_s^t \left\|(\partial_t u)(\tau)\right\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1} d\tau \quad \text{for } 0\le s<t. \tag{1.3}$$

(1.3) より, $E(t)$ は時間に関して単調減少することがわかる. 従って, 時刻無限大で $E(t)$ がゼロ (エネルギーの減衰と呼ぶ) か非ゼロ (エネルギーの非減衰と呼ぶ) に近づくのかといった問題が発生する.

この問題について初めて結果を得たのが, Mochizuk-Motai [8] である. 彼らは, 重み付きエネルギー法を用いて, $1<p<1+2/n$ かつ $0<\gamma<2/(p-1)$ であれば,

$$E(t)\le C\{\log(2+t)\}^{-\gamma}$$

が成立し, $p>1+2/(n-1)$ かつ $n\ge 2$ であればエネルギーの非減衰が起こることを示した. 後にこの減衰のレートは Todorova-Yordanov [10] や Wakasa-Yordanov[11] によって改良された. ここで, $1+2/n\le p\le 1+2/(n-1)$ の場合については, エネルギーの減衰か非減衰が起こるか不明であることに注意する.

しかしながら, $(n,p)=(2,3)$ の場合には, コンパクト台をもつ十分小さい初期値に対してはエネルギーの減衰が起こることがわかっている. これは以下のような理由による. 2 次元空間で 3 次の非線形項を持つ波動方程式は, 一般には時間大域解の存在が期待できない. 実際, この例を与えるのは $\partial_t^2 u-\Delta u=|\partial_t u|^3$ で, 初期値が小さくとも, 解が有限時間内で爆発することがわかっている (Schaeffer [9], Agemi [1]). 従って, 時間大域解が存在するような非線形項の構造を見出すことが求められる (詳しくは, Katayama-Murotani-Sunagawa [3] や Katayama-Matsumura-Sunagawa [4] を参照). その際, 特性方向の解の微分の各点的な挙動の解析が主となり, そこで得られた評価からエネルギーの減衰が得られるのである. このような流れで, $(n,p)=(2,3)$ の場合に初めて解の各点的な挙動を示したのが Kubo [6] であり, 次のような評価式が得られている：

$$|\partial u(t,x)|\le Cr^{-\frac12}\left(\log\frac{r}{|r-t-1|+1}\right)^{-\frac12},\quad r\ge\frac{t}{2}+1, \tag{1.4}$$

ここで $r=|x|$ とおいた. 一般に空間 2 次元の場合には, 線形波動方程式の解の減衰は $|\partial u(t,x)|\le C(1+t+r)^{-\frac12}(1+|t-r|)^{-\frac32}$ であり, $t=r$ では, 減衰のレートは $-1/2$ である. 反対に, (1.4) の評価では, 非線形項の消散性の影響により, $t=r$ であっても $(\log t)^{-\frac12}$ の減衰が additional に得られる. この評価は後に, Katayama-Murotani-Sunagawa [3] によって次のように改良された:

$$|\partial u(t,x)|\le C\langle t+r\rangle^{-\frac12}\min\left\{(\log t)^{-\frac12},\varepsilon\langle t-r\rangle^{-(1-\mu)}\right\} \tag{1.5}$$

for $(t,x) \in [2,\infty) \times \mathbb{R}^2$. ここで, $0 < \mu \ll 1$, ε は十分小さいパラメータであり, $\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$. 更に (1.5) を用いて, エネルギーの減衰も示されている.

$$E(t) \le C\varepsilon\{\varepsilon^2 \log(2+t)\}^{-\frac{1-\delta}{4}}$$

ここで $0 < \delta \ll 1$ である. つまり, $(n,p) = (2,3)$ の場合には, 初期値が小さければエネルギーの減衰が起こることがわかる. なお, $p = 3$ は空間 2 次元のエネルギーの非減衰が起こる境目である.

以上のことから, 初期値に小ささを仮定しない場合には, 重み付きエネルギー法を用いてエネルギーの減衰・非減衰が部分的に示されており, 初期値に小ささを仮定した場合には, 特別な場合に詳細な解の各点的挙動が得られ, エネルギーの減衰がわかっている. 我々の目的は, コンパクト台をもつ小さい初期値に対して, $n = 1$ かつ $p > 2$ の場合に, 解の各点的な評価を通してエネルギーの減衰を示すことにある. Mochizuk-Motai [8] によれば, $n = 1$ かつ $1 < p < 3$ の場合にはエネルギーの減衰が起こることが示されている. 従って, $n = 1$ で, 少なくとも $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ の場合には $1 < p < \infty$ に対してエネルギーの減衰が成立することがわかった. また, エネルギーの非減衰が起こる境目の指数が $1 + 2/(n-1)$ であることから, $n = 1$ の場合は形式的にエネルギー非減衰が起こらないと期待される. したがって, エネルギーの減衰と非減衰が起こる境目の臨界指数は, $1 + 2/(n-1)$ であると予想される. すなわち, $1 < p \le 1 + 2/(n-1)$ ではエネルギーの減衰が起こり, $p > 1 + 2/(n-1)$ ではエネルギーの非減衰が起こるという予想である.

2 Main Result

我々の主結果は次の通りである:

Theorem 2.1. *$n = 1$ かつ $p > 2$ とし, (f,g) はコンパクト台をもつ滑らかな関数とする. 更に, $1/(p-1) < \kappa < 1$ とする. このとき, ある正定数 M_0, M_1, M_2, ε_0 が存在して, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ である限り, (1.1) の時間大域解は*

$$|\partial u(t,x)| \le \min\left\{M_0(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}, M_1\varepsilon\langle t-|x|\rangle^{-\kappa}\right\} \tag{2.1}$$

for $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$

$$E(t) \le M_2\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

をみたす.

Remark 1. *(1) 線形の 1 次元波動方程式の解は $t = |x|$ 上で減衰は得られないが, (2.1) の評価をみると消散項の影響から $t = |x|$ 上でも減衰することがわかる.*

また, (2.1) の $M_0(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}$ の評価は, 常微分方程式 $2\phi'(t)+|\phi(t)|^{p-1}\phi(t) = 0$ の解に関連している. 実際, この方程式を解くと,

$$\phi(t) = \frac{2^{\frac{1}{p-1}}\phi(0)}{\left(2+(p-1)|\phi(0)|^{p-1}t\right)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

となり, 十分大きい t に対して, $|\phi(t)|$ は $2^{\frac{1}{p-1}}(p-1)^{-\frac{1}{p-1}}t^{-\frac{1}{p-1}}$ のように振る舞う. そこでは, 評価が $\phi(0)$ に依存しないため, (2.1) の評価 $M_0(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}$ に ε が現れていない. また, M_0 は初期値に無関係に取ることができる.

(2.1) のもうひとつの評価 $M_1\varepsilon\langle t-|x|\rangle^{-\kappa}$ は, $t=|x|$ から離れたところ ($\big|t-|x|\big| > t/2$) では, $\kappa > 1/(p-1)$ から, $M_0(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}$ の評価よりも良くなっているが, 小さいパラメータ ε が含まれている.

(2) 空間 1 次元で $1 < p \leq 2$ の場合に, 各点評価 (2.1) が成立するかどうかは不明である. しかし, エネルギーが減衰することは, *[8]* や *[11]* でわかっている. 今回の結果は, 空間 1 次元で, 少なくともコンパクト台をもつ小さい初期値に対しては $p > 1$ でエネルギー減衰が起こることを示した初めての結果である.

3 Key Lemma and Sketch of the Proof

まず, Haraux [2] によって得られた, 次の 1 次元波動方程式の特性に着目した評価式について述べる. 特性方向の偏微分作用素を

$$\partial_\pm = \partial_t \pm \partial_x \tag{3.1}$$

と定義し,

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} \{|\partial_+ u(t,x)| + |\partial_- u(t,x)|\}\, dx$$

とおく. このとき, 次が成立する:

Lemma 3.1. $n=1$ かつ $p>2$ とし, (f,g) はコンパクト台をもつと仮定する. このとき, すべての $t \geq 0$ に対して

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\partial_x u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq H(t) \leq H(0) \tag{3.2}$$

が成立する.

評価式 (3.2) より, エネルギーの減衰 (2.2) が直ちに従う. 実際,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial u(t,x)|^2\, dx \leq \frac{\|\partial u(t)\|_{L^\infty}}{2} H(t) \leq \frac{\|\partial u(t)\|_{L^\infty}}{2} H(0)$$

より,
$$E(t) \le M_0(\|f'\|_{L^1} + \|g\|_{L^1})\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}$$
となるため, (2.2) は $M_2 = M_0(\|f'\|_{L^1} + \|g\|_{L^1})$ とおくことで示される.

各点評価 (2.1) は, Bootstrap argument により次の主張を示せば十分である.

Proposition 3.2. *$T>0$ とし, M_0, M_1 は十分大きな正定数とする. このとき, ある正定数 ε_0 が存在して, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ かつ*

$$m_0(T) := \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}} (1+t)^{\frac{1}{p-1}} |\partial u(t,x)| \le M_0$$
$$m_1(T) := \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}} \langle t-r\rangle^{\kappa} |\partial u(t,x)| \le M_1\varepsilon$$

であれば,
$$m_0(T) \le \frac{M_0}{2}, \quad m_1(T) \le \frac{M_1\varepsilon}{2}.$$

上の主張を示すとき, (1.1) に対応する次の積分方程式の解析が主となる:
$$\partial_{\pm}u(t,x) = (u_1 \pm u_0')(x\pm t) + \int_0^t F\bigl(u_t(\tau, x\pm(t-\tau)\bigr)\, d\tau \tag{3.3}$$
ここで, $F(\lambda) = -|\lambda|^{p-1}\lambda$ とおいた. また, $|\partial u|^2 = \frac{1}{2}\left\{(\partial_+ u)^2 + (\partial_- u)^2\right\}$ に注意する. $\partial_+ u$ の評価は (3.3) の第 2 項 (デュアメル項) を摂動として導出する. (3.3) の表示式の性質上, この評価は $\partial_- u$ の評価よりも良い. 具体的には,
$$|\partial_+ u(t,x)| \le C\varepsilon\langle t+r\rangle^{-\kappa}, \quad |\partial_+ u(t,x)| \le C(1+t)^{-\frac{p}{p-1}}\langle t-r\rangle \tag{3.4}$$
といった, 光錐上 $t=r$ であっても減衰が得られる良い評価式を得る.

$\partial_- u$ の評価は, 次の常微分方程式の解挙動に帰着されるため, 最も重要である:
$$\begin{cases} 2\phi'(t) = -|\phi(t)|^{p-1}\phi(t) + \Lambda(t), & t>t_0, \\ \phi(t_0) = \phi_0, \end{cases} \tag{3.5}$$
ここで, $t_0\ge 0$, $\Lambda\in C\bigl([t_0,\infty)\bigr)$ である.

Lemma 3.3. *$p>1$, $\phi\in C^1\bigl([t_0,T)\bigr)$ を (3.5) の解とする.*

(1) ある正定数 A_1 と ρ が存在して,
$$|\Lambda(t)| \le A_1(1+t)^{-1-\rho} \quad (t_0\le t<T) \tag{3.6}$$
であれば,
$$|\phi(t)| \le |\phi_0| + \frac{A_1}{2\rho}(1+t_0)^{-\rho} \quad (t_0\le t<T). \tag{3.7}$$

(2) 正定数 A_2 に対して

$$|\Lambda(t)\phi(t)| \le A_2^2(1+t)^{-1-\frac{2}{p-1}} \quad (t_0 \le t < T) \tag{3.8}$$

であれば, ある p に依存した正定数 B_p が存在して,

$$|\phi(t)| \le \big((1+t_0)^{\frac{1}{p-1}}|\phi_0| + A_2 + B_p\big)(1+t)^{-\frac{1}{p-1}} \quad (t_0 \le t < T). \tag{3.9}$$

証明は, [4] に基づいており, いわゆる (重み付き) エネルギー不等式等を導出する方法により示される.

さて, $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して, $t_{0,\sigma} = 0$ if $\sigma \ge 0$, $t_{0,\sigma} = |\sigma|$ if $\sigma < 0$ とおく. $t \ge t_{0,\sigma}$ に対して

$$V_-(t,\sigma) := \frac{1}{2}(\partial_- u)(t, t+\sigma)$$

とおくと, (3.3) から V_- がみたす微分方程式は

$$2\partial_t V_-(t,\sigma) = -|V_-(t,\sigma)|^{p-1}V_-(t,\sigma) + R(t,\sigma),\ t \ge t_{0,\sigma}$$

であることがわかる. なお, $R(t,\sigma)$ (剰余項) は

$$R(t,\sigma) = |V_-(t,\sigma)|^{p-1}V_-(t,\sigma) - |(\partial_t u)(t,t+\sigma)|^{p-1}(\partial_t u)(t,t+\sigma)$$

とおいた. 今,

$$V_-(t,\sigma) = (\partial_t u)(t,t+\sigma) - \frac{1}{2}(\partial_+ u)(t,t+\sigma)$$

に注意すると, 剰余項 $R(t,\sigma)$ は

$$R(t,\sigma) = -\frac{p}{2}\left(\int_0^1 \left|(\partial_t u)(t,x) - \frac{\theta}{2}(\partial_+ u)(t,x)\right|^{p-1} d\theta\right) \partial_+ u(t,x)\Bigg|_{x=t+\sigma}$$

と表される. これにより,

$$|R(t,\sigma)| \le C|\partial u|^{p-1}|\partial_+ u|$$

となるので, 減衰が良い $\partial_+ u$ の因子を引き出すことできるのである. そこで, (3.4) の 2 つ目の評価式を使いながら, 剰余項が仮定 (3.6) と (3.8) をみたすように評価すれば所望の評価式を得る.

References

[1] R. Agemi, *Blow-up of solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions*, Manuscripta Math., **73** (1991), 153-162.

[2] A. Haraux, *L^p estimates of solutions to some non-linear wave equations in one space dimension*, International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimization **1** (2009), no. 1-2, 146—154.

[3] S. Katayama, D. Murotani and H. Sunagawa, *The energy decay and asymptotics for a class of semilinear wave equations in two space dimensions*, J. Evol. Equ. **12** (2012), 891–916.

[4] S. Katayama, A. Matsumura and H. Sunagawa, *Energy decay for systems of semilinear wave equations with dissipative structure in two space dimensions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **22** (2015), 601–628.

[5] S. Katayama, K. Wakasa and B. Yordanov, *Decay property for nonlinear damped wave equations in one space dimension*, J. Differential Equations **404** (2024), 279-296.

[6] H. Kubo, *Asymptotic behavior of solutions to semilinear wave equations with dissipative structure*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, Dynamical systems and differential equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., 602–613.

[7] J-L. Lions, and W. A. Strauss, *Some non-linear evolution equations*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 43–96.

[8] K. Mochizuki and T. Motai, *On energy decay-nondecay problems for wave equations with nonlinear dissipative term in R^N*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), no. 3, 405–421.

[9] J. Schaeffer, *Finite-time blow-up for $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$ in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **11** (1986), 513–543.

[10] G. Todorova and B. Yordanov, *The energy decay problem for wave equations with nonlinear dissipative terms in $\mathbb{R}^n$*, Indiana University Mathematics Journal **56** (2007), no. 1, 389–416.

[11] K. Wakasa and B. Yordanov, *On the energy decay for dissipative nonlinear wave equations in one space dimension*, J. Math. Anal. Appl. **455** (2017), 1317–1322.