

Schrödinger 方程式の Cauchy 問題における解の一意性について

平林 大来

本研究では以下のスカラーポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式の Cauchy 問題における解の一意性について考える：

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \partial_x^2 u(t, x) - V(x)u(t, x) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ で、 $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数、スカラーポテンシャル $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 、 u_0 は既知関数、 $\partial_t u = \frac{\partial}{\partial t} u$ 、 $\partial_x^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$ である。

先行研究 [2] では次のことが示されている：

$V(x) \equiv 0$ のとき、恒等的に 0 は解なので、恒等的に 0 でない (1) を満たす非自明解として、

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j i^j}{(2j)!} \varphi^{(j)}(t) x^{2j} \quad (2)$$

を挙げている。ここで、 $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ がある定数 $C \geq 1$, $1 < \rho < 2$ について

$$|\varphi^{(j)}(t)| \leq C^j (j!)^\rho \quad (t \in \mathbb{R}, \forall j \geq 0) \quad (3)$$

を満たし、さらに

$$\begin{cases} \varphi(t) > 0 & (t > 0) \\ \varphi(t) = 0 & (t \leq 0) \end{cases} \quad (4)$$

を満たすものとする。

通常、Schrödinger 方程式の Cauchy 問題は解 u の x に関する増大度を制限することで解が一意的に定まることが知られている。しかし、解 u に制限をかけないとき、解が一意的に定まるとは限らない。

そこで、本研究では、[3] を参考に $V(x) = \frac{a}{x^2}$, x^{2n} ($a > 0$, $n \geq 0$) に対して解の一意性が成り立つかどうかについて考察した。

主定理. $V(x) = \frac{a}{x^2}$, x^{2n} ($n \geq 0$) のとき、(1) を満たす解の一意性が成り立たない。ただし、 $a > 0$ とする。

私が調べた限りでは、 $V(x) \equiv 0$ 以外の Schrödinger 方程式の Cauchy 問題における解の一意性についての先行研究は見当たらなかった。

参考文献

- [1] 熊ノ郷 準、『偏微分方程式』（共立出版、1978）
- [2] 谷島 賢二、『数理物理入門 改訂改題』（東京大学出版会、2018）
- [3] 近藤 貴仁、熱伝導方程式の初期値問題における局所解の一意性について（東京理科大学数学専攻修士論文、2019）
- [4] F.John、『偏微分方程式』（丸善出版、2017）