数値解析における非線形熱伝導方程式の爆発条件と挙動

東京理科大学大学院理学研究科数学専攻加藤研究室所属　栗林 幸史

本研究では以下の非線形熱方程式における爆発について数値計算の手法を用いて考える：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

ただし、Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の領域とし、p は 1 より大きい定数とする.
(1) の解が $\lim_{t \to T} \sup_{x \in \Omega} |u(x,t)| = \infty$ を満たすとき、$T < \infty$ ならば解 u は有限時間爆発するといい、$T = \infty$ ならば解 u は時間大域的に存在するないしは無限時間爆発するという.
(1) の解の構造は p が Sobolev 臨界指数 p_s より大きいか小さいかによって大きく変化する. ここで $p_s := (N+2)/(N-2)$(ただし、$N = 1,2$のとき$p_s = \infty$) である. $p < p_s$ の時、時間大域的な解は必ず有界になる.
また非線型項のべき指数 $p_f = 1 + 2/N$ を藤田臨界指数という. これは (1) の正値解が有限時間で爆発して解が時間大域的に延長できなくなる臨界である.$p > p_f$ ならば、十分小さな初期関数に対して (1) の解は時間大域的に存在する.$p < p_f$ ならば任意の初期関数において解が爆発する.
今回は特に Dirichlet 境界条件に加え、$\Omega = [0,1]$ とし、t の範囲を $0 \leq t \leq T$ とした有限時間爆発について考察する.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = |u|^{p-1}u, & 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) = u_0, & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 < t \leq T \end{cases} \tag{2}$$

先行研究では次のことが示されている: (1) の 1 次元 Dirichlet 初期境界値問題

$$\begin{cases} |v|^{p-1}v + v'' = 0, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

について、Ω が一次元有界領域で、$\Omega \neq \phi$ ならば全ての $p > 1$ に対して、(3) はただ一つの正値解を持つ. この時の正値解を定常解 v_1 としたときに、u_0 は $u_0(x) \geq v_1(x), u_0(x) \not\equiv v_1(x), (x \in \Omega)$ を満たす連続関数である. この時、(2) の解 u は有限時間内で爆発する. また $u_0(x) \leq v_1(x)(x \in \Omega)$ であるならば (2) の解 u は t に関して一様に有界である.
この事実を用い、Ω_1,$\Omega_2 \subset \Omega$(ただし $\Omega_1 \neq \phi,\ \Omega_2 = \Omega \backslash \Omega_1$) において、$f(x) \geq v_0(x)(x \in \Omega_1)$、$f(x) < v_0(x)(x \in \Omega_2)$ となるようなある連続関数 f が (2) の第二式の u_0 であるとき、熱伝導方程式 (2) の解は爆発するかを調べる.

考察

初期関数 f の面積等の条件によって爆発するかどうかを調べる. 定常解を求めると上に凸な放物線を取ることがわかった. これに対して $\alpha \sin(\beta\pi)$、$\alpha e^{-\beta x^2}$ といった関数を初期関数として取ることで (2) の解が有限時間爆発を起こすか調べ、爆発する条件を探す.

判定方法として今回は一次元熱伝導方程式を考慮して、有限差分法である陽解法、陰解法を採択する.
詳しい結果については発表内でグラフにて示す.

参考文献

[1] P. Quittner and P. Souplet, Superlinear Parabolic Problems. Blowup, Global Existence and Steady States. Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher, 2007.
[2] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I 13 (1966).
[3] N. Mizoguchi and E. Yanagida, Critical exponents for the blowup of solutions with sign changes in a semilinearparabolic equation II, J.Differential Equations 145 (1998).