

Blow-up phenomena in a two-dimensional repulsive chemotaxis-consumption system with superlinear density-dependent sensitivity*

佐藤 光流 (東京理科大・理 M2)

次の偏微分方程式系の初期値境界値問題を考える:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \nabla \cdot (u(u+1)^{\ell-1} \nabla v), & x \in B_R, t > 0, \\ 0 = \Delta v - uv, & x \in B_R, t > 0, \\ (\nabla u + u(u+1)^{\ell-1} \nabla v) \cdot \nu = 0, \quad v = M, & x \in \partial B_R, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in B_R. \end{cases}$$

ここで, $B_R \subset \mathbb{R}^2$ は原点を中心とする半径 R ($R > 0$) の開円板, $\ell > 1$, $M > 0$ は定数, ν は ∂B_R 上の外向き単位法線ベクトル, u_0 は非負値の既知関数で, u と v は x, t を変数とする非負値の未知関数である.

問題 (P) は反発・消費型走化性方程式系とよばれており, その解が時間大域的に存在して有界となるか, またはある有限時刻 $T_{\max} \in (0, \infty)$ で爆発する解が存在するかどうかを解明することが, 研究テーマの一つとしてあげられる. ここで, 解の有界性と爆発はそれぞれ次のように定義される:

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} < \infty \text{ (解の有界性)}, \quad \lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty \text{ (解の爆発)}.$$

なお, 問題 (P) の第 1 方程式の拡散項 Δu は解の有界性を導く性質をもち, 走化性項 $\nabla \cdot (u(u+1)^{\ell-1} \nabla v)$ は解の爆発を導く性質をもつと考えられる.

上のテーマに対して, Ahn–Winkler [1] は第 1 方程式を $u_t = \nabla \cdot ((u+1)^{-\alpha} \nabla u) + \nabla \cdot (u \nabla v)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) とした場合を考え, $\alpha \leq 0$ ならば解が時間大域的に存在して有界であり, $\alpha > 0$ かつ境界での v の値 M が十分に大きいならば有限時刻で爆発する解が存在することを示した. すなわち, 拡散の効果が $(u+1)^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) によって弱まると解の爆発が起こる. これに対して, 本研究では,

走化性の効果が $(u+1)^{\ell-1}$ ($\ell > 1$) によって強まると, 解は爆発するか?

という問いについて考える. Zeng–Li [2] は上記の問いに対する解答として次の定理を示し, 本研究でも同じ定理をほぼ同時期に独立して証明した:

定理 ([2, Theorem 1.4])

任意の $R > 0$, $\ell > 1$ と非負で球対称な関数 $u_0 \in C(\overline{B_R}) \setminus \{0\}$ に対して, 次を満たす定数 $M_* > 0$ が存在する: 任意の $M \geq M_*$ に対して, $T_{\max} \in (0, \infty)$ と問題 (P) の古典解 (u, v) が存在して, $\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty$ が成り立つ.

[2] の証明は, [1] の証明と同じ型の線形の微分不等式の導出を目標としているが, 走化性項に $(u+1)^{\ell-1}$ が含まれているにもかかわらず微分不等式に ℓ の効果が現れていないため, 不自然である. **本研究では, ℓ の効果を反映した非線形の微分不等式を導き, 自然な証明を与える.**

参考文献

- [1] J. Ahn and M. Winkler. A critical exponent for blow-up in a two-dimensional chemotaxis-consumption system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 62(6):Paper No. 180, 25 pages, 2023.
- [2] Z. Zeng and Y. Li. Boundedness and finite-time blow-up in a repulsion-consumption system with nonlinear chemotactic sensitivity. arXiv:2409.01853, 2024.

*本研究は小波津 晶平 氏 (東京理科大・理), 田中 悠也 氏 (関西学院大・理) との共同研究に基づく.