静的源と相互作用する量子場を用いたクライン-ゴルドン方程式の解の構成

竹川 隼貴 (東京理科大学)

本論文は量子場と与えられた静的源との相互作用を記述するボソンフォック空間上のファン・フォーベモデルにおいて, 古典的クライン-ゴルドン方程式

$$\left(\partial_t^2 - \Delta + m^2\right)\varphi(t,\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

の解を構成するものである. ただし $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が未知関数である実スカラー場, $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は与えられた静的源関数, Δ はラプラシアン, $m > 0$ は粒子の質量を表す. ファン・フォーベモデルは, $(d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m)\Psi)^{(0)} = 0$ かつ

$$(d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m)\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n) = \sum_{j=1}^{n}\omega_m(\boldsymbol{k}_j)\Psi^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n), \quad (n \geq 1)$$

で定められる第二量子化作用素 $H_0 = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m)$ と, シーガル場の作用素からなる相互作用 $H_{\mathrm{I}} = -\overline{\left(a(f_{\mathrm{I}}) + a^\dagger(f_{\mathrm{I}})\right)}/\sqrt{2}$ の和で表されるハミルトニアン $H = H_0 + H_{\mathrm{I}}$ で記述される. ただし $\omega_m(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$, $f_{\mathrm{I}} = \hat{\rho}(\boldsymbol{k})/\sqrt{\omega_m(\boldsymbol{k})}$, $\hat{\rho}$ は ρ のフーリエ変換, $a(f_{\mathrm{I}})$ と $a^\dagger(f_{\mathrm{I}})$ は後述する生成および消滅作用素を表す.

定義 1 (ボソンフォック空間)**.** $d \in \mathbb{N}$ を次元, σ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元として, ボソンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ を

$$L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}) = \left\{\Psi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}^{dn}) | \Psi^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n) = \Psi^{(n)}(\boldsymbol{k}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{k}_{\sigma(n)}),\ \text{a.e.}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n) \in \mathbb{R}^{dn}\right\}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$$

によって定義する. なお $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{d0}) = \mathbb{C}$ である. $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ の内積は $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty},\ \Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_b$ に対して

$$\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\Psi^{(n)},\Phi^{(n)}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{dn})} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{dn}}\Psi^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)^*\Phi^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\,d\boldsymbol{k}_1\cdots d\boldsymbol{k}_n$$

によって与えられ, この内積に関して $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ はヒルベルト空間になる. ただし, $*$ は複素共役を表す.

定義 2 (生成作用素, 消滅作用素)**.** $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ として $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の生成作用素 $a^\dagger(f)$ を $(a^\dagger(f)\Psi)^{(0)} = 0$ かつ

$$(a^\dagger(f)\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{k}_j)\Psi^{(n-1)}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_{j-1},\boldsymbol{k}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{k}_n), \quad (n \geq 1)$$

で定めると $a^\dagger(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり, さらに消滅作用素 $a(f)$ を $a^\dagger(f)$ の共役作用素として定義する.

先行研究 [1] では粒子の質量がゼロの場合を扱っていたのに対して, 本研究では質量がゼロでない場合を扱う. 質量を持つことによって [1] で課されていた, 次元の仮定と赤外領域の特異性を除くためのいくつかの仮定を外すことができた. その結果が以下である.

主定理. $d \in \mathbb{N}$, $\rho, \hat{\rho} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\rho \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. $\|\Psi\|_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))} = 1$ をみたす任意の $\Psi \in \mathcal{D}(H_0^{\frac{d+4}{2}})$ に対して

$$\varphi_{\mathrm{cl},\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\sqrt{2\omega_m(\boldsymbol{k})}}\left(F_\Psi(t,\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + F_\Psi(t,\boldsymbol{k})^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right)d\boldsymbol{k} \tag{2}$$

とおくと, $\varphi_{\mathrm{cl},\Psi_U}(t,\boldsymbol{x})$ が (1) の解になる. ただし, $F_\Psi(t,\boldsymbol{k}) = \left\langle\Psi, e^{itH}a(\boldsymbol{k})e^{-itH}\Psi\right\rangle_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))}$, $\Psi_U = U\Psi$ であり, $a(\boldsymbol{k})$ は消滅作用素の核, $U = e^{-i\pi_{\mathrm{s}}(f_{\mathrm{I}}/\omega_m)}$ は $\pi_{\mathrm{s}}(f/\omega_m) = i\overline{\left(-a(f_{\mathrm{I}}/\omega_m) + a^\dagger(f_{\mathrm{I}}/\omega_m)\right)}/\sqrt{2}$ で表されるユニタリ作用素である.

参考文献

[1] Toshimitsu Takaesu. Construction of Solutions of the Classical Field Equation of a Massless Klein-Gordon Field Interacting with a Static Source Tokyo J . Math,Vol.44 pp.314-322, No.2, 2021.