

時間依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の解の適切性

和田 慎一郎

本研究では以下の時間依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式について考える：

$$(1) \begin{cases} i\partial_t u(t, x) = -\frac{1}{2}\Delta u(t, x) + V(t, x)u(t, x), & t \in [-T, T], x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, スカラーポテンシャル $V : [-T, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数, $\partial_t u = \frac{\partial}{\partial t} u$, $\partial_{x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j} u$ ($j = 1, \dots, n$), $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ である. また $T > 0$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ とする.
ここで以下の記号を定義する.

定義 1 ($L^{m,\rho}$ ノルム). $1 \leq m \leq \infty, 1 \leq \rho \leq \infty$

$$L^{m,\rho}(I) := \{ u \in L^1_{loc}(I \times \mathbb{R}^n) \mid \| \|u(t, \cdot)\|_{L^m_x(\mathbb{R}^n)} \|_{L^\rho_t(I)} = \|u\|_{m,\rho} < \infty \}.$$

定義 2.

$I_T = [-T, T]$ とし, $1 \leq m_1, m_2 \leq \infty, 1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq \infty$ とする.

$V \in L^{m_1,\rho_1}(I_T) + L^{m_2,\rho_2}(I_T)$

$\Leftrightarrow$ ある $V_1 \in L^{m_1,\rho_1}, V_2 \in L^{m_2,\rho_2}$ があって, ほとんど全ての $(t, x) \in I_T \times \mathbb{R}^n$ で $V(t, x) = V_1(t, x) + V_2(t, x)$.

谷島賢二氏は [1] で時間依存するポテンシャルをもつ Schrödinger 方程式の初期値問題 (1) の解の適切性及び時間局所的な Strichartz 評価の証明を与えている.

仮定 1.

$p \geq 1, \alpha \geq 1, \beta > 1$ とし, $0 \leq \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{n}{2p}$ を満たすとする. $\tilde{p} = \max(p, 2)$ とし, $\theta(l) = \frac{4l}{n(l-2)}, \theta(2) = +\infty$ とする.

また V として, $V \in L^{p,\alpha}(I_T) + L^{\infty,\beta}(I_T)$ かつ $V \in C(I_T, L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)) + C(I_T, L^\beta(\mathbb{R}^n))$ を満たす V をとり,

さらに, $W := \partial_t V \in L^{p_1,\alpha_1}(I_T) + L^{\infty,\beta}(I_T)$ を満たすとする.

ただし $p_1 = \frac{2np}{n+4p}$ とし, $n \leq 3$ のとき $\alpha_1 > \frac{4p}{4p-n}, n \geq 4$ のとき $1 \leq \alpha_1 \leq \infty$ とする.

定理 [1]

$V(t, x)$ は仮定 1 を満たし, $q = \frac{2p}{p-1}, \theta = \theta(q) = \frac{4p}{n}$ とする.

このとき, 方程式 (1) は任意の $u_0 \in \mathcal{H}$, に対し唯一つの解 $u \in C(I_T, \mathcal{H}) \cap L^{q,\theta}(I_T)$ をもち,

(1) $\|u(t)\|_{\mathcal{H}} = \|u_0\|_{\mathcal{H}}$.

(2) u_0 に依らないある定数 $C_{q,T}$ があって, $\|u\|_{q,\theta} \leq C_{q,T} \|u_0\|_{\mathcal{H}}$ が成り立つ.

本研究では, 上記の定理の証明を詳細に検討した. 現在, Δ を $(-i\nabla - A)^2$ に置き換えた磁場中の式について考察をしている.

参考文献

[1] Kenji Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, Comm.Math.Phys.110(1987),no.3,415–426.

[2] Kenji Yajima, Schrödinger evolution equation with magnetic fields, Journal d'Analyse Mathématique. – (1991),no.,29–76.

[3] 谷島 賢二: シュレーディンガー方程式 I,II, 朝倉書店, (2014).