

ポテンシャル付き非線形 Schrödinger 方程式の 初期値問題の時間大域解について

渡辺 響

本研究では以下の、ポテンシャルをもつ非線形 Schrödinger 方程式における初期値問題の大域解について考える。

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} (\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 u(t, x) = V(t, x)u(t, x) + \lambda |u(t, x)|^{p-1} u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p \geq 1$ で, $u(t, x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ についての複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2$), $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$, $\mathbf{a}(t, x) = (a_1(t, x), a_2(t, x))$ とする。

本研究では磁場ポテンシャル $\mathbf{a}(t, x)$ に以下の仮定を課す。

仮定 1 $\mathbf{a}(t, x)$ はある $\omega(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ を用いて,

$$\mathbf{a}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & \omega(t) \\ -\omega(t) & 0 \end{pmatrix} x =: \Omega(t)x$$

と表せる。

仮定 2 $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 上 C^∞ 級であり, ある定数 $\rho \leq 2$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ に対し,

$$\sup_{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2} (1 + |x|)^{|\alpha| - \rho} |\partial_x^\alpha V(t, x)| < \infty.$$

本研究では Antonelli–Marahrens–Sparber, 2012[1] で用いられた方程式の変換を参考にし, (1) の大域解の存在と一意性について研究を行い, 以下の主定理を得た。

主定理 $\Sigma(1) := \{f \in H^1(\mathbb{R}^2) \mid \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2} < \infty, |\alpha + \beta| \leq 1\}$ とする。このとき, 以下のいずれかをみたすならば, 任意の $u_0 \in \Sigma(1)$ に対し, (1) の一意的な解 $u(t) \in C(\mathbb{R}; \Sigma(1))$ が存在する:

1. $\lambda < 0$ かつ $1 \leq p < 3$ $\left(= 1 + \frac{4}{2}\right)$.
2. $\lambda \geq 0$.

参考文献

- [1] P. Antonelli, D. Marahrens and C. Sparber, On the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations with rotation, Discrete Contin. Dyn. Syst. **32** (2012), no. 3, 703–715; MR2851876
- [2] 堤 誉志雄 『偏微分方程式論』, 培風館, 2004.
- [3] 谷島 賢二 『シュレーディンガー方程式』, 朝倉書店, 2014.
- [4] M. Ohta and G. K. Todorova, Remarks on global existence and blowup for damped nonlinear Schrödinger equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. **23** (2009), no. 4, 1313–1325; MR2461853
- [5] 田中 克和, 定磁場をもつ非線形 Schrödinger 方程式の大域解について, 修士論文, 2005.