

ON SCATTERING FOR THREE DIMENSIONAL SCHRÖDINGER OPERATORS WITH ABSORBING POTENTIALS

門脇 光輝 (滋賀県立大学工学部)

本講演では、次の (A1) から (A3) を満たす吸収型のポテンシャル $V(x) = V_1(x) - iV_2(x)$, ($x \in \mathbb{R}^3$) を伴う 3 次元 Schrödinger 作用素: $H = -\Delta + V(x)$ の散乱問題¹を考察したい.

(A1) $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

(A2) $V_1(x)$ と $V_2(x)$ 実数値である. 特に $V_2(x) \geq 0$ であり, 非自明な開集合上で $V_2(x) > 0$ である.

(A3) ある $\delta_0 > 0$ に対して, $|x| \rightarrow \infty$ のとき $|V(x)| = O(e^{-\delta_0|x|})$ である.

本講演の目標: 目標を述べる前に $H = -\Delta + V$, $\mathcal{D}(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$ (resp. $H_0 = -\Delta$, $\mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$) は $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ における消散作用素 (resp. 自己共役作用素), つまり $-iH$ (resp. H_0) は縮小半群 $\{e^{-itH}\}_{t \geq 0}$ (resp. unitary 群 $\{e^{-itH_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$) を生成することを注意しておく. そして目標は以下である:

$t \rightarrow \infty$ のとき $e^{-itH}u$, ($u \in \mathcal{H}$) が非消散・散乱状態, つまり $u_+ (\neq 0) \in \mathcal{H}$ が存在して

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-itH}u - e^{-itH_0}u_+\| = 0$$

となるための u の必要十分条件を H のスペクトル $\sigma(H)$ に基づいて決定する. ここで $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ のノルムである.

$\sigma(H)$ と波動作用素 W : $\sigma(H)$ については [13], [1] などにおける議論, 結果から

$\sigma(H)$ は $[0, \infty)$ と有限個の多重度有限の複素固有値 (その虚部は負) からなる.

さらに [14] により実固有値は存在しないことが判明している. このことと [12] (Theorem 9.3) から (インバース) 波動作用素

$$W = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_0} e^{-itH}$$

が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への非自明な有界作用素として存在する. これは

ある $u (\neq 0) \in \mathcal{H}$ に対して $u_+ = Wu (\neq 0) \in \mathcal{H}$ が存在して (1) が成立する

つまり $e^{-itH}u$, ($u \in \mathcal{H}$) の非消散・散乱状態の存在を意味する. しかし, 示されたことは「存在」のみで, 散乱状態のための初期条件 u に対する十分条件などが得られたわけではない. これまでのこの類の結果の多くは, 後に触れる Kato-small[7] を V に仮定しない限り, この段階までのものが多く, 本講演で掲げている目標まで到達したものはごくわずかである.

主結果: P_λ を H の複素固有値 $\lambda \in \sigma_p(H) \cap \mathbb{C}_-$ の Riesz の射影作用素とする. そして

$$P = \sum_{\lambda \in \sigma_p(H) \cap \mathbb{C}_-} P_\lambda.$$

とおくと, $\text{Range } P$ は有限次元ベクトル空間である. 本講演の主結果は次である:

Theorem 1. (A1), (A2), (A3) のとき, 次が成立する:

$$\text{Ker } W = \text{Range } P.$$

¹この問題は光学モデルに対するそれを源としている (cf. [2]).

これにより, (1) の必要十分条件は $u - Pu \neq 0 (\iff u \notin \text{Range } P)$ であることがわかる².

証明について: Theorem 1 の証明は [8], [14] など示されている H_0 および H のレゾルベント評価を用いて [5], [6] における段取りを踏襲することでなされる. 証明で留意しなければならないのは H の特異スペクトルである Spectral singularity の存在とその扱いである. Spectral singularity は消散作用素を含む非自己共役作用素に対するスペクトル・散乱理論³を考察する際に現れることが多いが, 波動作用素 W の存在証明においてはそれを扱う必要はない. なお, V に [7] の Kato-small を仮定する場合は存在しないことが知られている⁴.

関連する結果など: 消散作用素に対する散乱理論に関する研究は数多あるが, その中で本講演の立ち位置に近い幾つかを紹介する. [9] では短距離型の消散項付き波動方程式に対して, [12] ではある特異性を許す短距離型吸収ポテンシャル付きの Schrödinger 方程式に対して波動作用素 (散乱状態) の存在を示している. そしてこれらの抽象化および一般化が [3] と [4] でそれぞれ行われている. また [5] と [6] では Spectral singularity が現れる階数 1 の吸収項・消散項を伴う 1 次元 Schrödinger 方程式と波動方程式に対して Theorem 1 と同じ結論を示している. 関連する研究の中で比較的最近の [1] が興味深い. そこでは消散作用素に対する散乱理論を抽象的に構成して, それを H に適用する形で Theorem 1 と同じ結論を得ている. ただし, (A1) を (A4): " $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ " に, (A3) を (A5): " $\text{supp } V(x)$ はコンパクトである" と仮定している⁵. さらに

(A6) 0 は自己共役作用素 $H_1 = -\Delta + V_1(x)$ の固有値でもレゾナンスでもない
も仮定している. なお, 本講演では (A6) を仮定していないことと, Theorem 1 の証明は [1] に比べてシンプルになされることを注意しておく. [9], [12] および [1] においては, ダイレクト波動作用素, 例えば H_0 と H に対しては:

$$\Omega = s - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itH} e^{itH_0}$$

の存在も示している. 特に [1] では Ω および W の値域を Spectral singularity の存在・非存在を絡めて論じている⁶. ダイレクト波動作用素も論じることにより散乱作用素 ($S = W\Omega$) が定義でき, さらに深い研究が可能になる. ちなみに V に Kato-small を仮定すると散乱作用素の定義はもちろん, H が自己共役作用素の場合に類した理論展開が可能になる.

REFERENCES

- [1] J. Faupin and J. Fröhlich, Adv. Math. 340 (2018), 300–362.
- [2] H. Isozaki, H. Nakazawa and G. Uhlmann, J. Math. Phys. 45 (2004), no. 7, 2613–2632.
- [3] M. Kadowaki, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 38 (2002), no. 1, 191–209.
- [4] M. Kadowaki, Osaka J. Math. 40 (2003), no. 1, 245–270.
- [5] M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, Hiroshima Math. J. 34 (2004), no. 3, 345–369.
- [6] M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, SUT J. Math. 44 (2008), no. 1, 1–22.
- [7] T. Kato, Math. Ann. 162 (1965/66), 258–279.
- [8] S.T.Kuroda, An introduction to scattering theory. Aarhus Universitet, Aarhus, 1978,
- [9] K. Mochizuki, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 (1976/77), no. 2, 383–390.
- [10] J. Schwartz, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 609–639.
- [11] S. A. Stepin, J. Nonlinear Math. Phys. 11 (2004), 194–203.
- [12] B. Simon, Duke Math. J. 46 (1979), no. 1, 119–168.
- [13] J. Rauch, Comm. Math. Phys. 61 (1978), no. 2, 149–168.
- [14] X.P.Wang, J. Math. Pures Appl. (9) 96 (2011), no. 5, 409–422.

²詳細は講演中に説明する.

³[10] で非自己共役作用素に対するスペクトル測度の特異点として注意されている. 本講演の H に対しては, [11] と同様に, $\lambda(>)0$ における H の極限吸収の原理が外向きでは成立するが, 従って λ は固有値ではない, 内向きは成立しないとき, λ を H の Spectral singularity であるという.

⁴このとき Theorem 1 は $\text{Ker } W = \{0\}$ となる.

⁵(A5) は (A3) に置き換えても, [1] のセッティングの適用は可能である.

⁶時間があれば講演中に少し詳しく説明等したい.