The least nodal eigenvalue of the non-local problems for the p-Laplacian

田中　視英子　(東京理科大学)*

本講演では [9] で発表した, 次の非局所項 $|u|_{q,w}$ を持つ p-Laplacian の固有値問題について紹介する.

$$(EV;\lambda) \quad \begin{cases} |u|_{q,w} := \operatorname{sign}\left(\int_\Omega w(x)|u|^q\,dx\right)\left|\int_\Omega w(x)|u|^q\,dx\right|^{1/q} & \geq 0, \\ -\Delta_p u = \lambda w(x)\,|u|_{q,w}^{p-q}\ |u|^{q-2}u & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで, $\operatorname{sign}(0) = 0$, $\operatorname{sign}(t) = t/|t|$ if $t \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ は有界領域, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < \infty$, $1 < q < p^*$, $p^* := pN/(N-p)$ (if $N > p$), $p^* := \infty$ (if $N \leq p$), $\lambda \in \mathbb{R}$ は(固有値)パラメーターである. さらに, 重み関数 $w \in L^r(\Omega)$ は $w^+ \not\equiv 0$ (ただし $w^\pm(x) := \max\{\pm w(x), 0\}$) で, r は

$$r \in [1,\infty] \quad (\text{if } N < p), \qquad \frac{Np}{Np - Nq + pq} < r \leq \infty \quad (\text{if } N \geq p),$$

を満たすものとする. $N \geq p$ のとき, 上の条件は $qr' < p^*$ $(r' := r/(r-1))$ と同値である.

簡単のため, 方程式 $(EV;\lambda)$ で**重み無し** $(w \equiv 1)$ の場合について既存の結果について説明する. この場合には非局所項 $|u|_{q,w}$ は通常の L^q ノルム $\|u\|_q$ となり, 方程式は

$$-\Delta_p u = \lambda \|u\|_q^{p-q}\ |u|^{q-2}u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{1}$$

となる. この方程式はで $p = q$ の場合は, 通常の p-Laplacian の固有値問題と一致する.

(1) の第一固有値は Sobolev–Poincaré 不等式の最良定数, すなわち

$$\lambda_q := \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^p} \,:\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\right\} > 0$$

で与えられ, この最小化関数は正値または負値な第一固有関数となる.

定義 1. 本講演では, 符号変化する固有関数 ($\|\nabla u^\pm\|_p > 0$ を満たす解) を持つような固有値 λ, すなわち, 方程式 $(EV;\lambda)$ が符号変化する解をもつ λ のことをのことを **nodal eigenvalue** と呼ぶことにする.

<u>$N = 1$, $w \equiv 1$ の場合</u>には, 全ての固有値は単純 ([8]) で具体的に表記 ([3]) することができ (具体的な結果は [5, Theorem 5.3] に載っています), [6] では n 番目の固有値の p, q についての単調性や漸近挙動を得ている.

<u>$N \geq 2$, $w \equiv 1$ の場合</u>については,

- Franzina–Lamberti ([5]) は第一固有値の単純性 ($q < p$ のとき) や, 変分法的固有値の列の構成 ($1 < p < \infty$, $1 < q < p^*$) を行った.
- Brasco–Lindgren ([2]) は, $2 < p < q$ かつ q は p に十分近い場合に第一固有値が単純であることを示した.
- Ercole ([4]) は $p < q < p^*$ のときに, 第一固有値の近傍に nodal eigenvalue は存在しないことを示した.

本研究は科研費 (課題番号:23K03170) の助成を受けたものである。

* e-mail: `miekotanaka@rs.tus.ac.jp`

一方, $p=q$ のときには第二固有値の存在とその特徴付けまで知られているが, $p\neq q$ のときは $N\neq 1$ を除いて第二固有値についての結果を見つけることができない.

そこで, $p=q$ のときの第二固有値の特徴付けの一つである **「最小な nodal eigenvalue が第二固有値である」** ということを踏まえて, 次の問題を考える.

$\boxed{\text{Q1}}$ $\mu_q^w := \inf\{\lambda>0 \,:\, (EV;\lambda)$ が符号変化解を持つ $\}$ は(正の)第二固有値になるか？

また, $p=q$ のときには第二固有値は Rayleigh 商を用いた minimax 値で表現できることが知られている ($w\equiv 1$ のときの [1, Proposition 4.2] と同様な手法で重み w がついた場合も示すことができる). そこで

$\boxed{\text{Q2}}$ μ_q^w を Rayleigh 商を用いて表現できるか？

という問題を考える.

$(EV;\lambda)$ の第一固有値(重み w 付き Sobolev–Poincaré 不等式の最良定数)を

$$\lambda_q^w := \inf\left\{ R_q^w(u) \,:\, u\in W_0^{1,p}(\Omega),\ |u|_{q,w}>0 \right\},\quad R_q^w(u) := \frac{\|\nabla u\|_p^p}{|u|_{q,w}^p}$$

で表すこととする.

注意 1. u が方程式 $(EV;\lambda)$ の符号変化解とすると, テスト関数として $u^\pm$ をとれば

$$0<\|\nabla u^\pm\|_p^p = \lambda |u|_{q,w}^{p-q}\,|u^\pm|_{q,w}^q \quad \text{なので}\quad \lambda = R_q^w(u^\pm)\left(\frac{|u^\pm|_{q,w}}{|u|_{q,w}}\right)^{p-q}$$

であり, 符号変化解は次の $\mathcal{A}_q^w$ に属することがわかる.

$$\mathcal{A}_q^w := \left\{ u=u^+-u^-\in W_0^{1,p}(\Omega) :\ |u^\pm|_{q,w}>0 \right\}.$$

次の結果は p-sublinear ($1<q<p$) で非負な重み $w\geq 0$ の場合には、$p=q$ の時と同じように第一固有関数以外は符号変化するというものである ($w\equiv 1$ で $p=q$ のときは [7], $q<p$ のときは [5] で示されている).

命題 1. $1<q<p$, $w_-\equiv 0$ とする. $\lambda\neq\lambda_q^w$ ならば $(EV;\lambda)$ は符号が一定な非自明解を持たない.

この結果から p-sublinear ($1<q<p$) な場合は $\boxed{\text{Q1}}$ に対しての肯定的な答えを得ることができた.

定理 1. $1<q<p$, $w_-\equiv 0$, Ω は $C^{1,1}$ 級の境界をもつとする. このとき, μ_q^w は符号変化する関数で達成され, $(EV;\lambda)$ の第二固有値となる. すなわち,

$$\mu_q^w = \min\left\{\lambda>\lambda_q^w \,:\, (EV;\lambda) \text{ は非自明解を持つ} \right\} > \lambda_q^w.$$

$1<q<p$ の場合には $\boxed{\text{Q2}}$ に対する結果は得られなかったが, μ_q^w の評価が得られた.

命題 2. $1<q<p$, $w_-\equiv 0$ とする. このとき,

$$\eta_q^w \leq \mu_q^w \leq \lambda_2^{LS}(q,w) \leq \min\left\{ \max\{R_q^w(u^+),\, R_q^w(u^-)\} \,:\, u\in\mathcal{A}_q^w \right\}$$

が成り立つ. ここで

$$\eta_q^w := \min\left\{ \max\left\{ \left(\frac{|u^+|_{q,w}}{|u|_{q,w}}\right)^{p-q} R_q^w(u^+),\, \left(\frac{|u^-|_{q,w}}{|u|_{q,w}}\right)^{p-q} R_q^w(u^-) \right\} \,:\, u\in\mathcal{A}_q^w \right\},$$

$$\lambda_n^{\mathrm{LS}}(q,w) := \inf_{A\in\Gamma_n}\max_{u\in A}\|\nabla u\|_p^p \qquad \text{for } n\in\mathbb{N}, \qquad S_q^w := \{\, u\in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, |u|_{q,w}=1 \,\},$$

$$\Gamma_n = \left\{ A\subset S_q^w :\ A \text{ is compact in } W_0^{1,p}(\Omega),\ A=-A \text{ and } \gamma(A)\geq n \right\},$$

$\gamma(A)$ は A の Krasnoselskii genus を表す.

μ_q^w は q と w に関して下半連続であることがわかる．とくに, $q=p$ では左連続であることがわかる．

命題 3. $1<q<p$, $w_- \equiv 0$, Ω は $C^{1,1}$ 級の境界をもつとする．$\{q_n\}_n \subset (1,p]$, $\{w_n\} \subset L^r(\Omega)$ s.t. $q_n \to q$, $w_n \geq 0$ a.e. in Ω, $w_n \to w$ in $L^r(\Omega)$ ならば

$$\mu_q^w \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{q_n}^{w_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_{q_n}^{w_n} \leq \min\left\{ \max\{R_q^w(u^+),\, R_q^w(u^-)\} \,:\, u \in \mathcal{A}_q^w \right\}$$

が成り立つ．とくに $p=\lim_{n\to\infty} q_n$ ならば $\mu_p^w = \lim_{n\to\infty} \mu_{q_n}^{w_n}$ となる．

一方, p-superlinear ($p<q<p^*$) の場合には, p-sublinear の場合とは異なり変換した Lane-Emden (Hénon) type の方程式 (LE) の正値解の一意性が一般には成立しないことから, $\boxed{\text{Q1}}$ に対する否定的な結果が得られる可能性がある．しかし, $\boxed{\text{Q2}}$ に対しては肯定的な答えを得ることができた．

定理 2. $p<q<p^*$ とする．このとき, μ_q^w は 2 nodal な関数により達成され

$$\begin{aligned}\lambda_q^w < \mu_q^w &= \min\left\{ \left(R_q^w(u^+)^{q/(q-p)} + R_q^w(u^-)^{q/(q-p)} \right)^{(q-p)/q} \,:\, u \in \mathcal{A}_q^w \right\}, \\ &= \min\left\{ \max\left\{ \left(\frac{|u|_{q,w}}{|u^+|_{q,w}} \right)^{q-p} R_q^w(u^+), \left(\frac{|u|_{q,w}}{|u^-|_{q,w}} \right)^{q-p} R_q^w(u^-) \right\} \,:\, u \in \mathcal{A}_q^w \right\} (= \eta_q^w)\end{aligned}$$

が成り立つ．また, μ_q^w は q と w に関して連続である: $\{q_n\}_n \subset (p,p^*)$, $\{w_n\} \subset L^r(\Omega)$ s.t. $q_n \to q \in [p,p^*)$, $w_n \to w$ in $L^r(\Omega)$ ならば $\mu_{q_n}^{w_n} \to \mu_q^w$ (as $n\to\infty$).

Ω が球で $w\equiv 1$ の場合などは, 以下の (LE) の正値解の一意性が知られているので ([5]), 特別な場合には μ_q^w が第二固有値になることがわかる．

系 1. $p<q<p^*$ とする．次の方程式

$$(LE) \qquad -\Delta_p v = w(x)|v|^{q-2}v \quad \text{in } \Omega, \qquad u=0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の非負値な非自明解が一意であるならば, μ_q^w は $(EV;\lambda)$ の第二固有値となる．

参考文献

[1] V. Bobkov, Least energy nodal solutions for elliptic equations with indefinite nonlinearity, Elect. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **56**, 1–15 (2014).

[2] L. Brasco and E. Lindgren, Uniqueness of extremals for some sharp Poincaré-Sobolev constants, Trans. American Math. Soc., **376** (5), 3541–3584 (2023).

[3] P. Drábek and R. Manásevich, On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p-Laplacian, Differential Integral Equations **12**, 773–788 (1999).

[4] G. Ercole, Sign-definiteness of q-eigenfunctions for a super-linear p-Laplacian eigenvalue problem, Arch. Math. **103**, 189–194 (2014).

[5] G. Franzina and P. D. Lamberti, Existence and uniqueness for a p-Laplacian nonlinear eigenvalue problem, Elect. J. Differential Equations, **26**, 10 pp (2010).

[6] R. Kajikiya, M. Tanaka and S. Tanaka, Asymptotic behavior and monotonicity of the best constant for the Sobolev–Poincaré inequality, Commun. Pure Appl. Anal., **24** (6), 1140–1155 (2025) doi: 10.3934/cpaa.2025028.

[7] B. Kawohl and P. Lindqvist, Positive eigenfunctions for the p-Laplace operator revisited, Analysis (Munich), **26**, 545–550 (2006).

[8] M. Ôtani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincare-type inequalities, Nonlinear Anal. **8**, 1255–1270 (1984).

[9] M. Tanaka, Remarks on the non-local eigenvalue problems for the p-Laplacian, Boundary Value Problems, 2025:21, 19 pp (2025) doi: 10.1186/s13661-025-02016-8.