

Global boundedness and large time behavior in a cooperative model with density-dependent diffusion

久藤 衡介 (早大理工)*

次のような非線形放物型方程式系の初期値境界値問題を考える。

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + \alpha \nabla \cdot \left[v^2 \nabla \left(\frac{u}{v} \right) \right] + u(a_1 - b_1 u + c_1 v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_t = d_2 \Delta v + \beta \nabla \cdot \left[u^2 \nabla \left(\frac{v}{u} \right) \right] + v(a_2 + b_2 u - c_2 v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 Ω は $\mathbb{R}^N$ における有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。また、 a_i は実定数 b_i, c_i, d_i は正定数、 α, β は非負定数とする。(1) は非線形拡散項を伴う Lotka-Volterra 系であり、領域 Ω に棲息する共生関係にある2種類の生物種に対して、未知関数 u と v はそれぞれの種の個体群密度を表す。非線形拡散項 $\nabla \cdot [v^2 \nabla(u/v)]$ および $\nabla \cdot [u^2 \nabla(v/u)]$ は共生種同士の拡散の相互作用を表していて、前者の項は u に対応する種の各個体が共生相手である v に対応する種が沢山いる方向に引き寄せられる傾向を模している。生物種の拡散のメカニズムに詳しい [4] によると、これらの非線形拡散項は走化性項 $-\nabla \cdot (u \nabla v)$ や交差拡散項 $\Delta(uv)$ とともに異種間の拡散による相互作用のプロトタイプの一つに挙げられるが、反応拡散系の見地からの研究はあまり進んでいない。そこで、非線形拡散項が解に与える効果を引き出すことを主眼に (1) について考察したい。なお、非線形拡散項は次のようにも表される：

$$\nabla \cdot \left[v^2 \nabla \left(\frac{u}{v} \right) \right] = \nabla \cdot (v \nabla u - u \nabla v) = v \Delta u - u \Delta v.$$

(1) の時間局所解の存在については、Amann による準線形放物型方程式の可解性に関する一連の研究 ([2] 等) により次が分かる。

定理 1 ([2]). 任意の $u_0, v_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ に対して、(1) は次のクラスの古典解

$$(u, v) \in [C(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max}))]^2$$

を一意的にもつ。なお $T_{\max} \in (0, \infty]$ は解の最大存在時刻であり、 $T_{\max} < \infty$ ならば、任意の $p > N$ に対して $\limsup_{t \nearrow T_{\max}} (\|u(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)}) = \infty$ となる。

(1) においては、 $b_1 c_2 < b_2 c_1$ (強共生) のケースでは実際に $T_{\max} < \infty$ となる解の存在が確かめられる。一方で、 $b_1 c_2 > b_2 c_1$ (弱共生) のときには、 $\alpha = \beta = 0$ ならば (1) の任意の正值解は、正值定数解 (u^*, v^*) が存在するならば、 $t \rightarrow \infty$ にそれに漸近し、正值定数解 (u^*, v^*) が存在しないならば両種が減衰していくことが知られている ([5])。自ずと $b_1 c_2 > b_2 c_1$ (弱共生) の下では「非線形拡散を伴うケースでも非定常解が定数解に漸近するシナリオは不変か？」という疑問が生じる。

本講演は早稲田大学大学院基幹理工学研究科修士課程を修了された加藤龍一氏との共同研究に基づく。

* e-mail: kuto@waseda.jp

本講演では、等ランダム拡散であって Ω が 3 次元以下の凸領域ならば、上述の疑問に一定の解答が与えられたので報告する．最初の結果は $b_1c_2 > b_2c_1$ よりさらに弱い共生条件の下では $L^\infty(\Omega)$ 吸收集合が存在することを示す．

定理 2 ([3]). 有界領域 Ω は $\mathbb{R}^N$ ($N \leq 3$) における凸領域とする．さらに $d_1 = d_2$ であって、

$$2\sqrt{\gamma b_1 c_2} > c_1 + \gamma b_2 \quad \text{ただし} \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta}$$

とする．このとき定理 1 で $T_{\max} = \infty$ である．さらに初期値に依存しない定数 $K > 0$ と初期値に依存する時刻 $t_0 > 0$ が存在して次が成り立つ．

$$t \geq t_0 \implies \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K.$$

弱共生条件 $b_1c_2 > b_2c_1$ の下では、

$$(i) \ 0 < a_1, a_2; \quad (ii) \ a_2 < 0 < a_1 \text{ かつ } \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{|a_2|}; \quad (iii) \ a_2 < 0 < a_1 \text{ かつ } \frac{|a_1|}{a_2} < \frac{c_1}{c_2} \quad (2)$$

のいずれかが成り立てば、正值定数解 $(u^*, v^*) = (\frac{a_1c_2+a_2c_1}{b_1c_2-b_2c_1}, \frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1c_2-b_2c_1})$ が存在することが容易に確かめられる．次の結果は、定理 2 の条件下で正值定数解が存在するケースでは、等ランダム拡散係数 $d := d_1 = d_2$ が大きければ (u^*, v^*) が大域漸近安定であることを述べる．

定理 3 ([3]). 定理 2 と同様の条件下で、さらに (2) の (i)-(iii) のいずれかが成り立つとする．このとき、 $\bar{d} = \bar{d}(\alpha, \beta, a_i, b_i, c_i) > 0$ が存在して、 $d \geq \bar{d}$ ならば、(1) の任意の正值解 (u, v) は次をみたす．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = (u^*, v^*) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

一方で、等ランダム拡散係数 d が十分に小さいケースでは、弱共生 $b_1c_2 > b_2c_1$ かつ (2) の (ii) もしくは (iii) が成り立つとき、非線形拡散 (α, β) の効果により、定数定常解 (u^*, v^*) から非定数定常解が分岐することが [1] によって示されている．したがって、非線形拡散系 (1) においては、定理 3 の条件下で、等ランダム拡散係数 d が十分に大きければ、 (u^*, v^*) が大域漸近安定となり $\alpha = \beta = 0$ と同じシナリオとなるが、 d が十分小さいと (α, β) の効果により非定数定常解が存在し、(1) の解の長時間挙動は複雑になりうる．

参考文献

- [1] M. ADACHI, K. KUTO, *Bifurcation structure of steady states for a cooperative model with population flux by attractive transition*. Stud. Appl. Math. **153** (2024), e12761.
- [2] H. AMANN, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II. Reaction-diffusion systems*. Diff. Int. Eqs. **3** (1990), 13–75.
- [3] K. KATO, K. KUTO, *Large time behavior of solutions to a cooperative model with population flux by attractive transition*. arXiv:2504.04166v1 [math.AP] 05 Apr 2025.
- [4] A. OKUBO, S.A. LEVIN, *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives, second ed.* Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [5] H. F. WEINBERGER, *Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems*. Rend. Mat. **8** (1975), 295–310.