

点相互作用を伴う連立非線形シュレディンガー方程式系に対する変分解析

東京理科大学 理学部第一部数学科
長田祐輝 (Yuki OSADA) *

1 導入

近年, 次のような連立非線形シュレディンガー方程式系が活発に研究されている:

$$\begin{cases} -\Delta u + \omega_1 u = |u|^2 u + \beta u |v|^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega_2 v = |v|^2 v + \beta |u|^2 v & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\beta \geq 0$ は定数である. このような系は, 複屈折光ファイバーにおける伝搬, 光学における Kerr のようなフォトリフラクティブ媒質, ボーズ・アインシュタイン凝縮 (例えば, [18, 22, 23] を参照) などの物理現象を記述する.

もし, u が次の単独の非線形シュレディンガー方程式

$$-\Delta u + \omega_1 u = |u|^2 u \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の解ならば, $(u, 0)$ は非線形シュレディンガー方程式系 (1) の解である. 同様に, もし v が次の非線形シュレディンガー方程式

$$-\Delta v + \omega_2 v = |v|^2 v \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の解ならば, $(0, v)$ は非線形シュレディンガー方程式系 (1) の解である. このようなタイプの解は通常 (1) の scalar solution と呼ばれる. 一方で, (1) の解 (u, v) に対して, 2つの成分が0でないならば (u, v) は (1) の vector solution と呼ばれる. したがって, (1) の ground state の存在性やその解が scalar なのか vector なのかを研究することは興味深い. 実際, ある境目が存在し, その境目より小さい β に対しては ground state が scalar になり, 大きい β に対しては vector になる. 例えば, [20, 21, 24] を参照.

一方, 欠陥や不純物がある場合, ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) の有効なモデルとして, 近年, 点相互作用を伴う非線形シュレディンガー方程式が提唱された. 物理的な背景については [26, 27] を参照.

1次元の場合, 点相互作用を伴う非線形シュレディンガー方程式の研究が盛んである. 例えば, ground state の存在性や定在波解の安定性・不安定性に関するものである. [8, 13, 15, 17] 等の文献

* E-mail: yuki.osada@rs.tus.ac.jp

本研究は Politecnico di Bari の Alessio Pomponio 氏との共同研究 (arXiv:2503.09438) に基づく.

を参照. 一方, 高次元の場合はあまり研究されていない. べき乗の非線形項をもつ場合, 2次元の問題は [2, 12] で検討されている. 一方で3次元の問題は [1] で研究されている. また, [25] は 2,3次元でより一般の非線形項を扱っている. 高次元の時間発展する問題については [9, 10, 14, 16] を参照. また関連する問題については [11] を参照.

形式的に, 点相互作用を伴う非線形シュレディンガー方程式では $-\Delta$ の代わりに $-\Delta_\alpha$ を考える. ここで $-\Delta_\alpha$ は原点に集中するディラックデルタをもつ非線形シュレディンガー作用素 $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta_0$ と考えることができる.

厳密には作用素 $-\Delta|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})}$ の自己共役拡張として与えられる. [4, 5, 6, 7] を参照.

$-\Delta_\alpha$ の定義域は

$$D(-\Delta_\alpha) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : \exists q \in \mathbb{C}, \lambda > 0 \text{ s.t.} \\ \phi_\lambda := u - q\mathcal{G}_\lambda \in H^2(\mathbb{R}^2), \phi_\lambda(0) = (\alpha + \theta_\lambda)q\}$$

として与えられる. ここで $\mathcal{G}_\lambda$ は $-\Delta + \lambda$ on $\mathbb{R}^2$ の Green 関数,

$$\theta_\lambda := \frac{\log\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) + \gamma}{2\pi}, \quad (2)$$

γ はオイラー定数である. さらに,

$$-\Delta_\alpha u := -\Delta\phi_\lambda - q\lambda\mathcal{G}_\lambda, \quad \forall u = \phi_\lambda + q\mathcal{G}_\lambda \in D(-\Delta_\alpha)$$

と定義される.

$-\Delta_\alpha$ のスペクトルは次のように与えられる:

$$\sigma(-\Delta_\alpha) = \{-\omega_\alpha\} \cup [0, \infty).$$

ここで

$$\omega_\alpha := 4e^{-4\pi\alpha - 2\gamma}. \quad (3)$$

(2) の θ_λ の定義から $\lambda > \omega_\alpha$ ならば $\alpha + \theta_\lambda > 0$ であることが分かる. 特に,

$$\langle -\Delta_\alpha u, u \rangle = \|\nabla\phi_\lambda\|_2^2 + \lambda\|\phi_\lambda\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 + (\alpha + \theta_\lambda)|q|^2, \quad \forall u = \phi_\lambda + q\mathcal{G}_\lambda \in D(-\Delta_\alpha)$$

を得る. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 内積を表す. [2, Remark 2.1] で観察したように, λ は free parameter で $-\Delta_\alpha$ や $q = q(u)$ は λ に依存しない.

$-\Delta_\alpha$ に付随するエネルギー空間は以下のように定義される:

$$H_\alpha^1(\mathbb{R}^2) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : \exists q \in \mathbb{C}, \lambda > 0 \text{ s.t. } \phi_\lambda := u - q\mathcal{G}_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^2)\}.$$

この正則性の低い空間でも $q = q(u)$ は λ に依存せず, 一意的に定まることに注意する.

任意の $\omega > \omega_\alpha$ に対して, 付随する 2 次形式を次のように定義する: $u = \phi_\lambda + q\mathcal{G}_\lambda \in H_\alpha^1(\mathbb{R}^2)$ に対して,

$$\langle (-\Delta_\alpha + \omega)u, u \rangle = \|\nabla\phi_\lambda\|_2^2 + \lambda\|\phi_\lambda\|_2^2 + (\omega - \lambda)\|u\|_2^2 + (\alpha + \theta_\lambda)|q|^2.$$

この 2 次形式も λ に依存しない. またノルムを次のように定義する:

$$\|u\|_{H_{\alpha,\omega}^1}^2 := \langle (-\Delta_\alpha + \omega)u, u \rangle = \|\nabla\phi_\lambda\|_2^2 + \lambda\|\phi_\lambda\|_2^2 + (\omega - \lambda)\|u\|_2^2 + (\alpha + \theta_\lambda)|q|^2.$$

明らかに, $q = 0$ ならば, $\|u\|_{H_{\alpha,\omega}^1}$ は H^1 ノルム $\|u\|_{H^1}$ に一致する.

このような動機から, 本講演では次の連立非線形シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases} -\Delta_\alpha u + \omega u = |u|^2 u + \beta u |v|^2 & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + \tilde{\omega} v = |v|^2 v + \beta |u|^2 v & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\beta)$$

ここで $\omega > \omega_\alpha$, $\tilde{\omega} > 0$, $\beta \geq 0$.

我々はこの問題を変分法を用いて解決したい. したがってそのフレームワークを導入する.

$$\mathbb{H}_\alpha := H_\alpha^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$$

とおく. 特に断らない限り, $\omega_\alpha < \lambda \leq \omega$ とする. $(\mathcal{P}_\beta)$ の解は次の汎関数 $I_\beta : \mathbb{H}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点として特徴付けられる:

$$\begin{aligned} I_\beta(u, v) &:= \frac{1}{2} (\langle (-\Delta_\alpha + \omega)u, u \rangle + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2) - \frac{1}{4}(\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\|\nabla \phi_\lambda\|_2^2 + \lambda\|\phi_\lambda\|_2^2 + (\omega - \lambda)\|u\|_2^2 + (\alpha + \theta_\lambda)|q|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2) - \frac{1}{4}(\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2. \end{aligned}$$

ここで $u = \phi_\lambda + q\mathcal{G}_\lambda \in H_\alpha^1(\mathbb{R}^2)$, $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

ground state $(\mathcal{P}_\beta)$ の非自明解 $(u_0, v_0) \in \mathbb{H}_\alpha$ が任意の $(\mathcal{P}_\beta)$ の非自明解 $(u, v) \in \mathbb{H}_\alpha$ に対して,

$$I_\beta(u_0, v_0) \leq I_\beta(u, v)$$

をみたすとき, (u_0, v_0) は $(\mathcal{P}_\beta)$ の ground state と呼ばれる.

$(\mathcal{P}_\beta)$ の ground state の存在性を示すために, 次の Nehari 多様体を導入する:

$$\mathcal{N}_\beta := \{(u, v) \in \mathbb{H}_\alpha \setminus \{(0, 0)\} \mid G_\beta(u, v) = 0\}.$$

ここで

$$\begin{aligned} G_\beta(u, v) &:= \langle (-\Delta_\alpha + \omega)u, u \rangle + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2 - (\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - 2\beta \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2 \\ &= \|\nabla \phi_\lambda\|_2^2 + \lambda\|\phi_\lambda\|_2^2 + (\omega - \lambda)\|u\|_2^2 + (\alpha + \theta_\lambda)|q|^2 \\ &\quad + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2 - (\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - 2\beta \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2. \end{aligned}$$

また, Nehari 多様体上の最小化問題を考える:

$$c_\beta := c_\beta(\omega, \tilde{\omega}) := \inf_{(u,v) \in \mathcal{N}_\beta} I_\beta(u, v). \quad (\text{ground state level})$$

ここで I_β は λ の選び方によらない. また Nehari 多様体 $\mathcal{N}_\beta$ と ground state level c_β も λ によ

らない. 特に, $\lambda = \omega$ とすると,

$$\begin{aligned}
I_\beta(u, v) &:= \frac{1}{2} (\langle (-\Delta_\alpha + \omega)u, u \rangle + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2) - \frac{1}{4}(\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2 \\
&= \frac{1}{2} (\|\nabla \phi_\omega\|_2^2 + \omega\|\phi_\omega\|_2^2 + (\alpha + \theta_\omega)|q|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2) - \frac{1}{4}(\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2, \\
G_\beta(u, v) &:= \langle (-\Delta_\alpha + \omega)u, u \rangle + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2 - (\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - 2\beta \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2 \\
&= \|\nabla \phi_\omega\|_2^2 + \omega\|\phi_\omega\|_2^2 + (\alpha + \theta_\omega)|q|^2 \\
&\quad + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2 - (\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - 2\beta \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2.
\end{aligned}$$

ここで $u = \phi_\omega + q\mathcal{G}_\omega \in H_\alpha^1(\mathbb{R}^2)$, $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

I_β と比較するために, 点相互作用のない汎関数 $I_\beta^0 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ が必要になる. ここで, $(u, v) \in \mathbb{H} := H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$ に対して,

$$I_\beta^0(u, v) := \frac{1}{2} (\|\nabla u\|_2^2 + \omega\|u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2) - \frac{1}{4}(\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2.$$

同様に, 付随する ground state level を

$$c_\beta^0 := c_\beta^0(\omega, \tilde{\omega}) := \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}_\beta^0} I_\beta^0(u, v),$$

と定義する. ここで, $\mathcal{N}_\beta^0$ は Nehari 多様体

$$\mathcal{N}_\beta^0 := \{(u, v) \in \mathbb{H} \setminus \{(0, 0)\} \mid G_\beta^0(u, v) = 0\},$$

であり,

$$G_\beta^0(u, v) := \|\nabla u\|_2^2 + \omega\|u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \tilde{\omega}\|v\|_2^2 - (\|u\|_4^4 + \|v\|_4^4) - 2\beta \int_{\mathbb{R}^2} |uv|^2.$$

c_β^0 は達成されることが知られている. 例えば, [3, 20, 24] を参照.

同様に点相互作用をもつ単独の非線形シュレディンガー方程式

$$-\Delta_\alpha u + \omega u = |u|^2 u \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

と点相互作用をもたない単独の非線形シュレディンガー方程式

$$-\Delta v + \tilde{\omega} v = |v|^2 v \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

に対して, ground state level をそれぞれ $d(\omega)$, $d^0(\tilde{\omega})$ とする.

また, 次の β に関する境目が必要になる.

$$\beta_0 := \beta_0(\omega, \tilde{\omega}) := \max\{\beta \geq 0 \mid c_\beta^0 = c_0^0\}, \quad (4)$$

$$\beta^* := \beta^*(\omega, \tilde{\omega}) := \max\{\beta \geq 0 \mid c_\beta = c_0\}. \quad (5)$$

$\beta_0 > 0$ であることが分かる. [19] を参照. また $\beta^* > 0$ であることも分かる.

scalar と vector $(u, v) \in \mathbb{H}_\alpha \setminus \{(0, 0)\}$ とする. $u = 0$ または $v = 0$ のとき (u, v) を scalar であるといい, $u \neq 0$ かつ $v \neq 0$ のとき vector であるという.

第一成分が特異部分を含むかどうかについて考察するために次の概念を導入する.

regular と singular $(u, v) \in \mathbb{H}_\alpha \setminus \{(0, 0)\}$ とする. $u = \phi_\lambda + q\mathcal{G}_\lambda$ ($\phi_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $q \in \mathbb{C}$) と表せる. $q = 0$ のとき (u, v) を regular であるといい, $q \neq 0$ のとき singular であるという.

2 主結果

本講演の主結果を述べる.

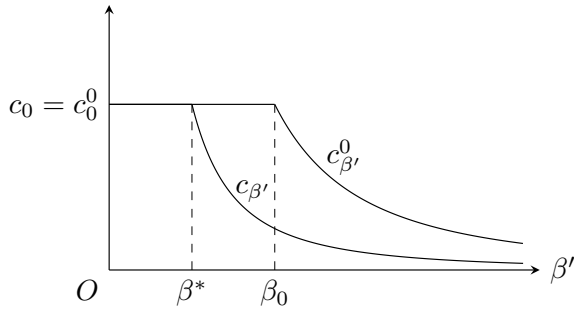
主結果 2.1. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega > \omega_\alpha$, $\tilde{\omega} > 0$, $\beta \geq 0$ とする. さらに $\omega \leq \tilde{\omega}$ とする. このとき $(\mathcal{P}_\beta)$ の ground state $(u_0, v_0) \in \mathbb{H}_\alpha$ が存在し, $q_0 \neq 0$ をみたす. ここで $u_0 = \phi_{\lambda,0} + q_0\mathcal{G}_\lambda$.

主結果 2.2. $\beta \geq 0$ かつ $c_\beta = c_\beta^0$ とする. このとき次が成り立つ:

$$\omega > \tilde{\omega}, \quad \beta \leq \beta^* \leq \beta_0, \quad c_\beta = c_\beta^0 = c_0^0 = c_0 = d^0(\tilde{\omega}) \leq d(\omega).$$

さらに次が成り立つ:

$$\begin{aligned} c_{\beta'} &= c_{\beta'}^0, \quad \forall 0 \leq \beta' \leq \beta^*, \\ c_{\beta'} &< c_{\beta'}^0, \quad \forall \beta' > \beta^* \end{aligned}$$

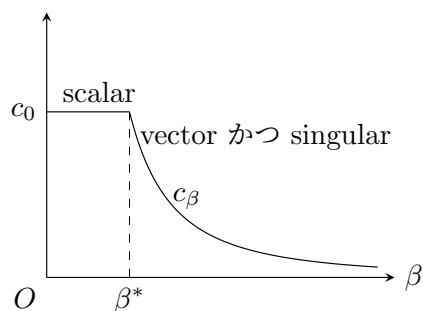


主結果 2.3. $\beta \geq 0$ とする. このとき次は同値である:

1. $c_\beta = c_\beta^0$;
2. $d(\omega) \geq d^0(\tilde{\omega})$ かつ $\beta \leq \beta^*$.

注意 2.1. $\beta \geq 0$ とし $(u_0, v_0) \in \mathbb{H}_\alpha$ を $(\mathcal{P}_\beta)$ の ground state とする. このとき次が成り立つ:

	$0 \leq \beta < \beta^*$	$\beta > \beta^*$
$d(\omega) > d^0(\tilde{\omega})$	scalar かつ regular ($u_0 = 0$)	vector かつ singular
$d(\omega) = d^0(\tilde{\omega})$	scalar かつ regular ($u_0 = 0$) または scalar かつ singular ($v_0 = 0$)	vector かつ singular
$d(\omega) < d^0(\tilde{\omega})$	scalar かつ singular ($v_0 = 0$)	vector かつ singular



参考文献

- [1] Adami, R., Boni, F., Carlone, R., Tentarelli, L.: Existence, structure, and robustness of ground states of a NLSE in 3D with a point defect, *J. Math. Phys.* **63** (2022), Paper No. 071501.
- [2] Adami, R., Boni, F., Carlone, R., Tentarelli, L.: Ground states for the planar NLSE with a point defect as minimizers of the constrained energy, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **61** (2022), no. 5, Paper No. 195, 32 pp.
- [3] Ambrosetti, A., Colorado, E.: Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **75** (2007), 67–82.
- [4] Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R.: The low energy expansion in nonrelativistic scattering theory, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **37** (1982), 1–28.
- [5] Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H.: Point interactions in two dimensions: basic properties, approximations and applications to solid state physics, *J. Reine Angew. Math.* **380** (1987), 87–107.
- [6] Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H.: Solvable models in quantum mechanics, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.
- [7] Albeverio, S., Hoegh-Krohn, R.: Point interactions as limits of short range interactions, *J. Operator Theory*, **6** (1981), 313–339.
- [8] Boni, F., Carlone, R.: NLS ground states on the half-line with point interactions, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **30** (2023), Paper No. 51, 23pp.
- [9] Cacciapuoti, C., Finco, D., Noja, D.: Well posedness of the nonlinear Schrödinger equation with isolated singularities, *J. Differential Equations*, **305** (2021), 288–318.
- [10] Cacciapuoti, C., Finco, D., Noja, D.: Failure of scattering for the NLSE with a point interaction in dimension two and three, *Nonlinearity*, **36** (2023), 5298–5310.
- [11] de Paula Ramos, G.: Minimizers of constrained functionals involving a point interaction, preprint, arXiv:2407.09870.
- [12] Fukaya, N., Georgiev, V., Ikeda, M.: On stability and instability of standing waves for 2d-nonlinear Schrödinger equations with point interaction, *J. Differential Equations*, **321** (2022), 258–295.

- [13] Fukuizumi, R., Jeanjean, L.: Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **21** (2008), 121–136.
- [14] Finco, D., Noja, D.: Blow-up and instability of standing waves for the NLS with a point interaction in dimension two, *Z. Angew. Math. Phys.* **74** (2023), Paper No. 162, 17pp.
- [15] Fukuizumi, R., Ohta, M., Ozawa, T.: Nonlinear Schrödinger equation with a point defect, *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, **25** (2008), 837–845.
- [16] Georgiev, V., Michelangeli, A., Scandone, R.: Standing waves and global well-posedness for the 2d Hartree equation with a point interaction, *Comm. Partial Differential Equations*, **49** (2024), 242–278.
- [17] Kaminaga, M., Ohta, M.: Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equation with attractive delta potential and repulsive nonlinearity, *Saitama Math. J.* **26** (2009), 39–48.
- [18] Kaminow, I.P.: Polarization in optical fibers, *IEEE J. Quantum Electron.*, **17**, (1981), 15–22.
- [19] Kurata, K., Osada, Y.: Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **20** (2021), 4239–4251.
- [20] Lin, T.C., Wei, J.: Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, *Comm. Math. Phys.*, **255**, (2005), 629–653.
- [21] Maia, L.A., Montefusco, E., Pellacci, B.: Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system, *J. Differential Equations*, **229**, (2006), 743.
- [22] Menyuk, C.R.: Nonlinear pulse propagation in birefringence optical fiber, *IEEE J. Quantum Electron.*, **23**, (1987), 174–176.
- [23] Menyuk, C.R.: Pulse propagation in an elliptically birefringent Kerr medium, *IEEE J. Quantum Electron.*, **25**, (1989), 2674–2682.
- [24] Pomponio, A., Secchi, S.: A note on coupled nonlinear Schrödinger systems under the effect of general nonlinearities, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **9**, (2010), 741–750.
- [25] Pomponio, A., Watanabe, T.: Nonlinear scalar field equation with point interaction, preprint, arXiv:2410.00189.
- [26] Sakaguchi, H., Malomed, B. A.: Singular solitons, *Phys. Rev. E*. **101**, (2020), 012211.
- [27] Shamriz, E., Chen, Z., Malomed, B. A., Sakaguchi, H.: Singular Mean-Field States: A Brief Review of Recent Results, *Condensed Matter*, **5**, (2020), Article number: 20.