

時間減衰する調和および斥力ポテンシャルの下での 量子逆散乱について

石田敦英 (東京理大教養)[†]

2025年5月24日 神楽坂解析セミナー

1. 調和ポテンシャルの場合

本講演では[2, 3]の結果を紹介したい．空間次元 $n \geq 2$ とする．まず以下の時間に依存した非摂動系の自由ハミルトニアンを考える．

$$H_0(t) = p^2/2 + k(t)x^2/2. \quad (1.1)$$

ここで, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $ip = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $i = \sqrt{-1}$ であり, 時間 t に関する関数 $k(t)$ は, $0 < \sigma < 1/4$, $\omega > 0$, $r_0 > 0$ に対して以下で与えられるとする．

$$k(t) = \begin{cases} \omega^2 & \text{if } |t| \leq r_0, \\ \sigma/t^2 & \text{if } |t| > r_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

もし $k(t)$ が時間に依存しない定数, 例えば $k(t) \equiv \omega^2$ なら, $H_0(t) \equiv H_0 = p^2/2 + \omega^2 x^2/2$ はよく知られた調和振動子で, H_0 の下では解は束縛状態のみを形成して散乱状態は生じない．ところが $H_0(t)$ の場合には t^{-2} の減衰が x^2 と拮抗し, 完全自由 $p^2/2$ の場合とも異なった散乱状態を形成する．(1.1) の摂動である相互作用ポテンシャル関数 V は実数値の掛け算作用素であり, 摂動系を $H(t) = H_0(t) + V$ と表す．ポテンシャル関数の詳細な仮定は以下である．

仮定 1.1. 実数値関数 $V = V(x)$ は $V = V^{\text{bdd}} + V^{\text{sing}}$ と表され, 有界な部分 $V^{\text{bdd}} = V^{\text{bdd}}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ は以下の空間減衰の仮定をみたす．

$$|V^{\text{bdd}}(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-\rho}. \quad (1.3)$$

ここで, $\rho > 1/(1 - \lambda)$ であり, また $0 < \lambda = (1 - \sqrt{1 - 4\sigma})/2 < 1/2$ である．特異な部分 $V^{\text{sing}} = V^{\text{sing}}(x)$ はコンパクトな台を持ち $V^{\text{sing}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ を仮定する．ここで q は

$$\infty > q \begin{cases} = 2 & \text{if } n \leq 3, \\ > n/2 & \text{if } n \geq 4 \end{cases} \quad (1.4)$$

をみたすものである．

仮定 1.1 の下で, $H_0(t)$ と $H(t)$ の時間発展解作用 $U_0(t, s)$ と $U(t, s)$ は 2 パラメータ強連続ユニタリー群をなし, これらの一意存在は [4] によって保証されている．また条件 $\rho > 1/(1 - \lambda)$ は短距離型であり, 波動作用素

$$W^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) \quad (1.5)$$

本研究は科研費 (JP20K03625, JP21K03279) の助成を受けたものである．

[†] 〒125-8585 東京都葛飾区新宿 6-3-1 東京理科大学教養教育研究院葛飾キャンパス教養部
e-mail: aishida@rs.tus.ac.jp

が存在することが[1]で証明されている．そして散乱作用素 $S = S(V)$ は $S = (W^+)^*W^-$ で定義される．[2]において以下の相互作用ポテンシャル関数の一意性が証明された．

定理 1.2. V_1 と V_2 は仮定 1.1 をみたすとする． $S(V_1) = S(V_2)$ なら $V_1 = V_2$ である．

2. 斥力ポテンシャルの場合

次に考えたいのは以下の非摂動系である．混乱はないと思われるので前節と同じ記法を用いることにする．

$$H_0(t) = p^2/2 - k(t)x^2/2. \quad (2.1)$$

なお $k(t)$ は (1.2) と同じもの、ただし $\sigma > 0$ でよい ($\sigma < 1/4$ は不要)．つまり $k(t)$ の前の符号が反転しただけであるが、解の挙動は全く異なる． $k(t)$ が時間に依存しない定数、例えば $H_0(t) \equiv H_0 = p^2/2 - \omega^2 x^2/2$ ，ならば解の挙動は時間に関して指数増大することが知られており、それゆえ非常に緩やかな (log 程度) の空間減衰を持つポテンシャル関数の下であっても解はその影響を逃れ散乱状態を形成する ([3] の References を参照されたい)．一方 $H_0(t)$ の場合は、前節と同じく t^{-2} と x^2 の拮抗が生じて指数増大でもなく完全自由でもない散乱状態を形成することになる．相互作用ポテンシャル関数には以下を仮定する．

仮定 2.1. 実数値関数 $V = V(x)$ は $V = V^{\text{reg}} + V^{\text{sing}}$ と表され、 $V^{\text{sing}} = V^{\text{sing}}(x)$ は仮定 1.1 と同じものとする．一方 $V^{\text{reg}} = V^{\text{reg}}(x)$ は C^1 級であり、さらに以下の空間減衰の仮定をみたす．

$$|\partial_x^\beta V^{\text{reg}}(x)| \lesssim \begin{cases} \langle x \rangle^{-\gamma-|\beta|/2} & \text{if } \sigma \leq 2, \\ \langle x \rangle^{-\gamma-|\beta|} & \text{if } \sigma > 2. \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで $\gamma > 1/\mu$ であり、また $\mu = (1 + \sqrt{1 + 4\sigma})/2 > 1$ である．

[1] と全く同じ議論によって、条件 $\gamma > 1/\mu$ は短距離型であり、仮定 2.1 の下で波動作用素が存在することが証明される．散乱作用素の定義も同様である．[3] によって以下の相互作用ポテンシャル関数の一意性が証明された．

定理 2.2. V_1 と V_2 は仮定 2.1 をみたすとする． $S(V_1) = S(V_2)$ なら $V_1 = V_2$ である．

$\sigma \leq 2$ のときは $\gamma > 1/2$ であり、減衰条件 (2.2) はシュタルク効果の場合の短距離型、一方 $\sigma > 2$ のときは $\gamma \leq 1/2$ が許容され、これはシュタルク効果の場合の長距離型である． t^{-2} の効果が x^2 の働きを x にまで弱めて、さらに係数 σ の大きさがさらに細かく解の挙動に影響していることが読み取れる． V^{reg} に可微分性が必要であり、(2.2) における γ +微分の減衰 ($|\beta|/2$ または $|\beta|$) > 1 は相互作用ポテンシャル関数の再構成定理からも自然な条件となっている．

参考文献

- [1] A. Ishida, M. Kawamoto, Existence and nonexistence of wave operators for time-decaying harmonic oscillators. *Rep. Math. Phys.* **85** (2020), no. 3, 335–350.
- [2] A. Ishida, Quantum inverse scattering for time-decaying harmonic oscillators, *Inverse Probl. Imaging* **19** (2025), no. 2, 282–296.
- [3] A. Ishida, Quantum inverse scattering for time-dependent repulsive Hamiltonians, *arXiv:2504.05915*.
- [4] K. Yajima, Schrödinger evolution equations with magnetic fields. *J. Analyse Math.* **56** (1991), 29–76.