ある双線形振動積分作用素の有界性について

加藤 睦也　(岐阜大学)

関数 $\sigma = \sigma(\xi, \eta) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ のとき，σ を乗子とする双線形 Fourier 乗子作用素は

$$T_\sigma(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{ix\cdot(\xi+\eta)} \sigma(\xi,\eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) \, d\xi d\eta, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

で定義される．ここで，f, g は Schwartz クラス $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の関数とし，$\widehat{f}$ は f の Fourier 変換である．以下では，正定数 C が存在して，すべての $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，不等式 $\|T_\sigma(f,g)\|_{L^r} \le C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ が成り立つとき，$\sigma \in \mathcal{B}(L^p \times L^q \to L^r)$ と書くことにする．Lebesgue 空間 L^p 以外の関数空間に対しても，同様の記号を用いる．

定義. $m \in \mathbb{R}$ と $d \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 関数 σ で，すべての多重指数 α に対して，不等式

$$|\partial_\zeta^\alpha \sigma(\zeta)| \le C_\alpha \, (1 + |\zeta|)^{m-|\alpha|}$$

をみたすものの全体を，$S^m(\mathbb{R}^d)$ と定義する．

双線形 Foureir 乗子作用素の有界性を考える際，それを保証するための m に関する (最適な) 条件を調べることが，本分野でのひとつのテーマとなっている．Coifman–Meyer (1978) などによって，すべての $\sigma \in S^0(\mathbb{R}^{2n})$ に対して，$\sigma \in \mathcal{B}(L^p \times L^q \to L^r)$, $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1/r$, となることが示されている．

本講演では，振動項を付け加えた乗子 $e^{i\,(\phi_1(\xi)+\phi_2(\eta))}\,\sigma(\xi,\eta)$ について考える．この乗子による双線形 Fourier 乗子作用素は，つぎで定義される (線形)Fourier 乗子作用素

$$Sf(x) = S_\sigma^\phi f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \, e^{i\phi(\xi)} \, \sigma(\xi) \widehat{f}(\xi) \, d\xi$$

の双線形版と考えられる．この線形作用素については，つぎの定理が知られている．

定理 A. $1 < p < \infty$ とし，$0 < s < \infty$ とする．関数 ϕ は s 次斉次で，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上で C^∞ な実数値関数とする．このとき，

(1) $s = 1$ のとき，$m = -(n-1)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$,

(2) $s \ne 1$ のとき，$m = -sn\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$

ならば，すべての $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n)$ に対して，正定数 C が存在して，$\|Sf\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}$ が成り立つ．

$s = 1$ のときの定理 A は，Miyachi [2] と Peral [4] が $\phi(\xi) = |\xi|$ の場合を示し，Seeger–Sogge–Stein [6] が一般の 1 次斉次関数の場合を示している．$s \ne 1$ のときは，Miyachi[3] や Sjölin[5] によって示されている．なお，定理 A の m に関する条件は最良であることが，$s = 1$ のときには [2] において，$s \ne 1$ のときには [3] において，反例の存在によって示されている．

振動項付き乗子に対する双線形 Fourier 乗子作用素の有界性

$$e^{i\,(\phi_1(\xi)+\phi_2(\eta))}\,\sigma(\xi,\eta) \in \mathcal{B}(L^p \times L^q \to L^r)$$

については，Grafakos–Peloso (2010) が ϕ_1, ϕ_2 が 1 次斉次の場合のものを，Bernicot–Germain (2010) が $\phi_1(\xi) = \phi_2(\xi) = |\xi|^2$ の場合のものを初めて考察した．その後，Rodríguez-López et al. [7, $s = 1$ の場合] と Bergfeldt et al. [1, $s \ne 1$ の場合] などにより，以下の有界性が得られた．

本講演は, 宮地晶彦先生 (東京女子大学), 冨田直人先生 (大阪大学), 至田直人先生 (島根大学) との共同研究に基づく.

定理 B. $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1/r$ とし，$0 < s < \infty$ とする．関数 ϕ_1, ϕ_2 は s 次斉次で，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上で C^∞ な実数値関数とする．このとき，

(1) $s = 1$, $n \geq 2$ のとき，$m = m_1(p, q) = -(n-1)\big(\big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\big| + \big|\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\big|\big)$,

(2) $s \neq 1$ のとき，$m = m_s(p, q) = -sn\big(\big|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\big| + \big|\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\big|\big)$

ならば，すべての $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^{2n})$ に対して，$e^{i(\phi_1(\xi)+\phi_2(\eta))}\sigma(\xi, \eta) \in \mathcal{B}(L^p \times L^q \to L^r)$ となる．

定理 B の m に関する条件は，冒頭の Coifman–Meyer (1978) らによる有界性定理と定理 A の観点から，とても自然なものに思える．一方で，条件 m の最適性については，$1 < p, q \leq 2$, または，$2 \leq p, q < \infty$ の場合でのみしか得られていない．そこで，本講演での目的は，定理 B の改良と m に関する最適な条件を見つけることである．

定理 B は，端点 $(p, q) = (1, \infty)$ において，より良い条件 m での有界性を示せれば，複素補間と対称性によって改良できる．そのため，つぎが本講演での主定理となる ([8, $s = 1$], [9, $s \neq 1$])．

定理 1. $0 < s < \infty$ とする．関数 ϕ_1, ϕ_2 は s 次斉次で，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上で C^∞ な実数値関数とする．このとき，

(1) $0 < s < 1$ のとき，$m = -\frac{sn}{2} - \frac{s(1-s)n}{2}$,

(2) $s = 1$, $n \geq 2$ のとき，$m = -\frac{n}{2}$,

(3) $1 < s < \infty$ のとき，$m = -\frac{sn}{2}$

ならば，すべての $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^{2n})$ に対して，$e^{i(\phi_1(\xi)+\phi_2(\eta))}\sigma(\xi, \eta) \in \mathcal{B}(H^1 \times L^\infty \to L^1)$ となる．ただし，H^p は Hardy 空間を表し，$H^p = L^p$ $(1 < p \leq \infty)$，$H^1 \subsetneq L^1$ である．

ここで，実際に，定理 1 が定理 B の改良となっていることは，つぎのことからわかる：

(1) $0 < s < 1$ のとき，$m_s(1, \infty) = -sn < -\frac{sn}{2} - \frac{s(1-s)n}{2}$,

(2) $s = 1$, $n \geq 2$ のとき，$m_1(1, \infty) = -(n-1) \leq -\frac{n}{2}$,

(3) $1 < s < \infty$ のとき，$m_s(1, \infty) = -sn < -\frac{sn}{2}$.

また，特に，$\phi_1(\xi) = \phi_2(\xi) = |\xi|^s$ とした場合に，定理 1 の m に関する条件は最良である，すなわち，m の条件をこれより大きな値で置き換えることはできない．

定理 2. $m \in \mathbb{R}, 0 < s < \infty$ とする．このとき，すべての $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^{2n})$ に対して，$e^{i(|\xi|^s+|\eta|^s)}\sigma(\xi, \eta) \in \mathcal{B}(H^1 \times L^\infty \to L^1)$ が成り立つならば，

(1) $0 < s < 1$ のとき，$m \leq -\frac{sn}{2} - \frac{s(1-s)n}{2}$ でなければならない；

(2) $s = 1$, $n \geq 2$ のとき，$m \leq -\frac{n}{2}$ でなければならない；

(3) $1 < s < \infty$ のとき，$m \leq -\frac{sn}{2}$ でなければならない．

参考文献

[1] A. Bergfeldt, S. Rodríguez-López, D. Rule, and W. Staubach, Trans. Amer. Math. Soc. **376** (2023), 7555–7601.

[2] A. Miyachi, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **27** (1980), 331–354.

[3] A. Miyachi, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), 267–315.

[4] J. C. Peral, J. Funct. Anal. **36** (1980), 114–145.

[5] P. Sjölin, Math. Z. **165** (1979), 231–238.

[6] A. Seeger, C. D. Sogge, and E. M. Stein, Ann. of Math. **134** (1991), 231–251.

[7] S. Rodríguez-López, D. Rule, and W. Staubach, Adv. Math. **264** (2014), 1–54.

[8] T. Kato, A. Miyachi, and N. Tomita, Rev. Mat. Iberoam. **40** (2024), no. 4, 1571–1608.

[9] T. Kato, A. Miyachi, N. Shida, and N. Tomita, arXiv:2404.10488.