

完全非線形方程式における Calderón–Zygmund 評価について

北野修平 (東京大学)

1 導入

B_1 を n 次元単位球, $0 < \lambda \leq \Lambda$, $f \in L^1(B_1)$ とし, 次の Pucci 方程式を考える:

$$-\mathcal{P}^-(D^2u(x)) = - \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \text{tr}(AD^2u(x)) = f(x) \quad \text{for } x \in B_1. \quad (1)$$

本講演では, Pucci 方程式について以下の 2 つの問題を考察する.

1 正則性. 2 階微分項における非線形性が解の正則性構造にどのように影響を与えるか考察したい. 他の方程式 (Poisson 方程式や半線形方程式など) と比較して正則性はどのように異なるのか?

2 弱解の存在. Pucci 方程式やより一般の完全非線形方程式に対する弱解として, 既に粘性解が導入され適切性が研究されている (Crandall–Lions [4]). しかし, 粘性解理論において最大値原理を本質的に使うため, $f \in L^1$ など特異性の強い非斉次項を持つ方程式とは相性が悪く, 新しい弱解理論が必要であった.

2 $W^{2,1}$ 評価

定理 2.1 ([5]). $\lambda < \Lambda$ とする. ある定数 $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ が存在し次が成り立つ. $u \in W_{loc}^{2,1}(B_1)$ は (1) の L^1 -強劣解とする. すなわち次を満たすとする:

$$-\mathcal{P}^-(D^2u) \leq f \quad \text{a.e. in } B_1.$$

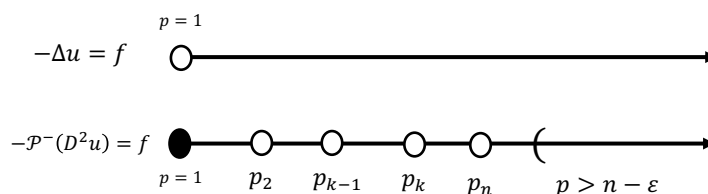
このとき次が成り立つ:

$$\|D^2u\|_{L^1(B_{1/2})} \leq C(\|f\|_{L^1(B_1)} + \|u\|_{L^1(B_1)}).$$

注意 2.2. 定理 2.1 では L^1 -強劣解を考えたが, ここでは $u \in W_{loc}^{2,p}(B_1)$ を (1) の L^p -強解とする. すなわち次を満たす:

$$-\mathcal{P}^-(D^2u) = f \quad \text{a.e. in } B_1.$$

この場合は, $W^{2,p}$ 評価について既に多くの研究がある. 以下に既存の結果との関係を図示する:



1. $\lambda = \Lambda$ の場合は, $W^{2,p}$ 評価が $p \in (1, \infty)$ に対して成り立つ (Calderón–Zygmund [3]).

2. $\lambda < \Lambda$ の場合, $W^{2,p}$ 評価が, $p > n$ に対して Caffarelli [2] によって, $p > n - \epsilon$ に対して Escauriaza [6] によって, $p = 1$ に対して Dong-K. [5] によって示された.
3. $k = 2, 3, \dots, n$ に対して, $p = p_k = k\Lambda/(\lambda(k-1) + \Lambda)$ のとき $W^{2,p}$ 評価の反例が知られている (Astala-Iwaniec-Martin [1], Pucci[7], Dong-K. [5]).
4. 上記以外の場合は $W^{2,p}$ 評価は未解決である.

3 弱解の存在定理

$\tau > 0$, μ を Radon 測度とし, n 次元平坦トーラス $\mathbb{T}^n$ 上における Pucci 方程式を考える:

$$\tau u - \mathcal{P}^-(D^2 u) = \mu \quad \text{in } \mathbb{T}^n.$$

次の "the largest subsolution" の存在定理を紹介する:

定理 3.1 ([5]). $\lambda < \Lambda$ とし, Radon 測度 μ は非負とする. このとき, 次の条件を満たす $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ が一意に存在する:

(i) 任意の非負値関数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と対称行列 $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$ に対し次が成り立つ:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\tau\varphi - \text{tr}(AD^2\varphi))dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu.$$

(ii) もし $v \in L^1(\mathbb{T}^n)$ が (i) を満たすならば, 次が成り立つ: $v \leq u$ a.e. in $\mathbb{T}^n$.

さらに, 以下の評価が成り立つ:

$$(iii) \quad \tau \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} + \frac{\Lambda - \lambda}{2} \|D^2 u\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)}.$$

ここで, $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)}$ は Radon 測度全体の空間におけるノルムである.

注意 3.2. (i) の条件は Pucci 方程式の超関数の意味での劣解であることを意味している. また, (ii) の条件から一意性が従う.

参考文献

- [1] K. Astala, T. Iwaniec, and G. Martin. Pucci's conjecture and the Alexandrov inequality for elliptic PDEs in the plane. *J. Reine Angew. Math.*, 591:49–74, 2006.
- [2] Luis A. Caffarelli. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. *Ann. of Math. (2)*, 130(1):189–213, 1989.
- [3] A. P. Calderon and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, 88:85–139, 1952.
- [4] Michael G. Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1):1–42, 1983.
- [5] Hongjie Dong and Shuhei Kitano. Second order L_p estimates for subsolutions of fully nonlinear equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 64(3):Paper No. 76, 20, 2025.
- [6] Luis Escauriaza. $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully nonlinear equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(2):413–423, 1993.
- [7] Carlo Pucci. Operatori ellittici estremanti. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 72:141–170, 1966.