

高階の微分方程式を動的境界条件とする 放物型偏微分方程式とその周辺

深尾 武史 (龍谷大学 先端理工学部)

概 要

本講演では放物型偏微分方程式の初期値境界値問題において、境界条件に時間微分を含む動的境界条件と呼ばれる境界条件下での適切性周辺を論じる。講演の前半では、動的境界条件の解釈について考察する。問題を考える主領域と接触する薄い補助領域の2つの領域上の接合問題の厚み0極限として動的境界条件が特徴付けられることを簡単な熱方程式を例に紹介する。講演の後半では境界上で Cahn–Hilliard 方程式の形をした高階の微分方程式を動的境界条件とする Allen–Cahn 方程式の初期値境界値問題について考察する。一見すると不良設定にみえるような前方後方動的境界条件を課した問題の適切性が境界上の拡散項の粘性消滅法によって論じられることを紹介する。

2023年に Giga–Lasica–Rybka らによって熱方程式における動的境界条件と接合問題の関連について精密な結果 [6] が発表された。この研究は容量集中 (concentrated capacity) と呼ばれる問題に対するもので、先行研究をたどると 1990 年の Colli–Rodrigues の結果 [5] にたどり着く。領域の境界に厚み δ を持たせ、その薄い領域内の熱方程式に対する熱容量、すなわち時間微分の係数 σ を連動して変化させると、その積 $\sigma\delta$ の極限值によって、接合問題の解はそれぞれ代表的な異なる境界条件下の問題の解へと収束することが知られている [5, 6, 8]。本講演の前半では動的境界条件の特徴付けに迫るべく、これらの論文で取り扱われている漸近解析について半空間における熱方程式を例に議論する。非線形項を含む場合への拡張を念頭に抽象発展方程式の理論から近似解の構成を行い、非斉次 Dirichlet 境界条件、非斉次 Neumann 境界条件、そして動的境界条件への接近をみる。特に動的境界条件の場合で正則性の回復を議論する。

講演の後半では前方後方動的境界条件に関する話題を取り扱う。 $\kappa > 0$ とし、 $0 < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界でその境界 Γ は十分なめらかとする。まず標準的な Cahn–Hilliard 方程式を考えてみる: $u := u(t, x)$, $\mu := \mu(t, x)$ を未知とし

$$\partial_t u - \Delta \mu = 0 \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$\mu = -\kappa \Delta u + \beta(u) + \kappa \pi(u) - h \quad \text{in } Q, \quad (2)$$

ここで、 $\beta + \pi$ は二重井戸型ポテンシャルの微分に相当し、特に β を単調項、 π を非単調項とする。例えば $\beta(r) = r^3$, $\pi(r) = -r$ である。形式的に $\kappa \rightarrow 0$ とすれば、(1)–(2) の極限方程式は

$$\partial_t u - \Delta \beta(u) = 0 \quad \text{in } Q$$

のような非線形拡散方程式となる (ただし、簡単のため $h \equiv 0$ としてある)。 β には単調性のみ仮定すれば、(1)–(2) の適切性が論じられることから、上記非線形拡散方程式は、多孔質媒体方程式や急速拡散方程式など、いわゆる退化放物型方程式、すなわち $\beta'(u) = 0$ となる点が存在することを許容する方程式となり弱解の存在が Cahn–Hilliard 方程式の

解の極限として保証できる (厳密な漸近解析は [2] を参照). 一方, (2) を次の形に差し替えると状況は一変する:

$$\mu = -\kappa \Delta u + \beta(u) + \pi(u) \quad \text{in } Q.$$

この場合, 形式的には極限方程式が

$$\partial_t u - \Delta(\beta(u) + \pi(u)) = 0 \quad \text{in } Q$$

となり, これは前方後方拡散方程式と呼ばれる方程式である. 実際, 極端な例として $\beta(r) \equiv 0, \pi(r) = -r$ の場合

$$\partial_t u + \Delta u = 0 \quad \text{in } Q$$

となってしまう, 一般には不良設定である.

この議論を Cahn–Hilliard 型の動的境界条件に対して行ってみる. $\tau, \varepsilon > 0$ とする. 例えば GMS モデル [1, 4, 7] と呼ばれる

$$\begin{cases} \tau \partial_t u - \varepsilon \Delta \mu = 0 & \text{in } Q, \\ \tau \mu = \partial_t u - \Delta u + \beta(u) + \pi(u) & \text{in } Q, \\ \partial_t u + \varepsilon \partial_\nu \mu - \Delta_\Gamma \mu = 0 & \text{in } \Sigma := (0, T) \times \Gamma, \\ \mu = \partial_\nu u - \kappa \Delta_\Gamma u + \beta_\Gamma(u) + \pi_\Gamma(u) & \text{on } \Sigma \end{cases}$$

なる (粘性) Cahn–Hilliard 型の方程式と動的境界条件の連立系で $\tau \rightarrow 0$ の議論から

$$(P)_{\varepsilon\kappa} \quad \begin{cases} -\varepsilon \Delta \mu = 0 & \text{in } Q, \\ \partial_t u - \Delta u + \beta(u) + \pi(u) = 0 & \text{in } Q, \\ \partial_t u + \varepsilon \partial_\nu \mu - \Delta_\Gamma \mu = 0 & \text{in } \Sigma, \\ \mu = \partial_\nu u - \kappa \Delta_\Gamma u + \beta_\Gamma(u) + \pi_\Gamma(u) & \text{on } \Sigma \end{cases}$$

なる Laplace–Allen–Cahn 方程式と Cahn–Hilliard 型の動的境界条件の連立系へ漸近解析 [3] が行われている. さらに, そこから $\varepsilon \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0$ なる極限操作を形式的に行えば, 極限は前方後方動的境界条件になり, 一見すると不良設定にみえる. 例えば極端な例 $\beta(r) = \pi(r) = \beta_\Gamma(r) \equiv 0, \pi_\Gamma(r) = -r$ では

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ \partial_t u + \Delta_\Gamma(u - \partial_\nu u) = 0 & \text{on } \Sigma \end{cases}$$

である. これら前方後方動的境界条件下の Allen–Cahn 方程式の適切性を本講演の後半で論じる. これに類する議論が [4] で行われていたが, 内部の方程式が 4 階の方程式 (Cahn–Hilliard 方程式) であったため, 不良設定にみえる問題が適切となる理由が, 内部が境界より高階の微分方程式であることに由来する可能性を否定できていなかった. 上記議論が正当化されることで, 内部が境界より高階であることは理由とはならないことが明確になる.

境界方程式の構造から, いわゆる粘性 Cahn–Hilliard 方程式の動的境界条件 [1, 3, 7] が近似問題として有効である. 近似問題においては時間微分が $L^2(\Omega)$ もしくは $L^2(\Gamma)$ で特徴付けられ, そこから議論に十分な一様評価を得ることができる. なお, 時間粘性項の消滅の議論は, すでに [3] で報告がなされている. 本講演では境界拡散の係数 κ の 0 極限に焦点をあてて, 一様評価が得られる本質についてエネルギー等式を用いて解説する.

参考文献

- [1] P. Colli and T. Fukao, Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potentials, *Nonlinear Anal.*, **127** (2015), 413–433.
- [2] P. Colli and T. Fukao, Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, *J. Differential Equations*, **260** (2016), 6930–6959.
- [3] P. Colli and T. Fukao, Cahn–Hilliard equation on the boundary with bulk condition of Allen–Cahn type, *Adv. Nonlinear Anal.*, **9** (2020), 16–38.
- [4] P. Colli, T. Fukao, and L. Scarpa, The Cahn–Hilliard equation with forward-backward dynamic boundary condition via vanishing viscosity, *SIAM J. Math. Anal.*, **54** (2022), 3292–3315.
- [5] P. Colli and J.-F. Rodrigues, Diffusion through thin layers with high specific heat, *Asymptotic Anal.*, **3** (1990), 249–263.
- [6] Y. Giga, M. Lasica, and P. Rybka, The heat equation with the dynamic boundary condition as a singular limit of problems degenerating at the boundary, *Asymptotic Anal.*, **135** (2023), 303–341.
- [7] G. R. Goldstein, A. Miranville, and G. Schimperna, A Cahn–Hilliard model in a domain with non-permeable walls, *Physica D*, **240** (2011), 754–766.
- [8] M. Liero, Passing from bulk to bulk-surface evolution in the Allen–Cahn equation, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **20** (2013), 919–942.