時間遅れを考慮に入れたBurgers方程式の時間大域解について

久保　隆徹　(お茶の水女子大学基幹研究院)

交通流の数理モデルの 1 つとして次の形の粘性 Burgers 方程式がよく知られている：

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x \left\{ V_m \rho \left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_m} \right) \right\} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{B}$$

ここで，未知関数 $\rho = \rho(x,t)$ は車の密度，定数 ν, V_m, ρ_m はそれぞれ拡散係数，$\rho \to 0$ のときの最大速度，車の最高密度を表す正定数であり，ρ_0 は初期密度を表す既知関数である．(**??**) は，車の密度 ρ と車の流量 q に対する保存則 $\partial_t \rho + \partial_x q = 0$ に流量と密度・速度 v の関係式：$q = \rho v$ と速度と密度の関係式

$$v = V_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

を代入して得られる．この速度 v に注目すれば，この数理モデルは運転手が刻一刻と変わる渋滞の状況を ρ により把握し，瞬時に自分が運転する車の速度を変えて運転していることを意味している．しかし，現実では渋滞の状況を把握し，アクセルやブレーキを使って車の速度を調整する運転手の反応に対するタイムラグが伴う．そのため，現実の状況をより精確に表すためには速度 v を以下のように時間遅れをもつ項を入れたほうがよいと考えられる：

$$v = V_m \left(1 - \frac{\rho_\tau}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

ただし，$\rho_\tau = \rho(x, t - \tau)$ とした．

以上のことを考慮して，本講演では固定された時間遅れパラメータ $\tau > 0$ に対して，時間遅れを考慮に入れた次の粘性 Burgers 方程式の初期履歴問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x \left(\rho V(\rho_\tau) \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(x, \theta) = \rho_0(x, \theta) & x \in \mathbb{R}, -\tau \leq \theta \leq 0. \end{cases} \tag{DB}$$

ただし，$V(\rho)$ は ρ に関して C^1 級とし，ρ_0 は既知関数とする．

この (**??**) に対して，神戸大学の上田好寛氏やお茶の水女子大学の岡田瑞希氏，小川実里氏との共同研究に基づいて得られた結果（時間大域解の一意存在性定理やその正則性に関する定理）を紹介する．