

ひずみ硬化現象を記述する発展包含の可解性について

赤川 佳穂 (京都教育大学)

1976 年に Duvaut–Lions らは、変分不等式として記述される完全塑性モデルについて議論した。このモデルは、ある制約集合に対して定まる指示関数の劣微分作用素によって支配される発展包含として定式化できる。本講演で扱うひずみ硬化現象は、材料が塑性変形を繰り返すことで強度が増加する現象である。この現象は、Duvaut–Lions らが提案した変分不等式において、制約集合を未知関数の履歴 (時間非局所的) に依存させることで表現される。いわゆる仮似変分不等式とよばれる問題である。ひずみ硬化則には移動硬化則と等方硬化則があり、本講演では特に線形移動硬化則モデルの可解性について紹介する。移動硬化則の先行研究として、1997 年の Showalter や 2006 年の Visintin などが挙げられる。

有限時刻 $0 < T < \infty$ において、有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d \geq 2)$ で表される材料の、応力テンソル $\sigma : Q := (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathcal{S}^d := \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ と、変位速度ベクトル $\mathbf{v} : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ が満たす以下の初期値境界値問題を考える。境界は滑らかで $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $|\Gamma_1| > 0$ を満たすものとする。

$$B \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, x) \in -\partial I_{Z(t, x; \mathbf{v})}(\sigma(t, x)) + \varepsilon(\mathbf{v}(t, x)) \quad \text{for } (t, x) \in Q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, x) = \operatorname{div}(\nu \varepsilon(\mathbf{v}(t, x)) + \sigma(t, x)) \quad \text{for } (t, x) \in Q, \quad (2)$$

$$\sigma(0, x) = \sigma_0 \quad \text{for } x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0 \quad \text{for } x \in \Omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_1, \quad (5)$$

$$(\nu \varepsilon(\mathbf{v}) + \sigma) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_2. \quad (6)$$

ここで、 $B : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ は弾性係数、 $\nu \geq 0$ は定数、 σ_0 と $\mathbf{v}_0$ は初期値、 $\varepsilon(\mathbf{v}) := (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)/2$ はひずみテンソル、 $\mathbf{n}$ は境界 $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトルである。さらに、 I_Z は閉凸集合 $Z \subset \mathcal{S}^d$ に対する指示関数である。 ∂I_Z はその劣微分を表し、集合 Z の法錐と等しい。発展包含 (1) は材料の応力テンソルの発展を記述する方程式であり、ラフに言えば、応力テンソル σ が制約集合の内向きに (制約を満たすように) 発展することを表現している。運動方程式 (2) は、Kelvin–Voigt 型の粘弾性体を表現するモデルである。本講演では制約集合 Z は以下のものを考える。

$$Z_M(t, x) := \left\{ \tau \in \mathcal{S}^d : |\tau^D| \leq g(t, x) \right\},$$

$$Z(t, x; \mathbf{v}) := Z_M(t, x) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}(\ell, x)) d\ell \quad \text{for } (t, x) \in Q. \quad (7)$$

ここで、 $\tau^D := \tau - (\operatorname{tr} \tau / d) E_d$ は偏差成分で、応力テンソル τ から静水圧成分 $(\operatorname{tr} \tau / d) E_d$ を除いたものである。ただし、 E_d は d 次単位行列。物理的にはせん断変形によって塑性変形が生じることを意味している。 $g : Q \rightarrow [0, \infty)$ は降伏局面を表す閾値関数で、集合 Z_M の条件は von Mises の降伏条件とよばれる。今、制約集合 Z は、集合 Z_M を $\varepsilon(\mathbf{v})$ の時間積分 (ひずみ履歴) によって平行移動する形で定義される。すなわち、 $\mathcal{L} : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ は、ひずみ履歴に応じて集合 Z_M を平行移動させる写像である。このひずみ履歴を考慮した平行移動が、移動硬化則を表現する重要なアイデアである ([6, 7])。一方、 $g \equiv \text{const.}$, $\mathcal{L} = 0$, $\nu = 0$ の場合は Duvaut–Lions のオリジナルの完全塑性モデルに対応する ([3])。

次に、発展包含 (1) を無限次元 Hilbert 空間上の抽象発展包含に、運動方程式 (2) を弱形式に、それぞれ書き直すために、関数空間と作用素を用意する。応力テンソルの基礎空間を $H := L^2(\Omega; \mathcal{S}^d)$, 変位速度ベクトルの基礎空間を $\mathbf{H} := L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ とし、その内積をそれぞれ $(\cdot, \cdot)_H$, $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}}$ と書く。また、 $\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a.e. on } \Gamma_1\}$ とする。さらに双線形形式 $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := (\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{w}))_H \quad \text{for } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$$

と定義する。 $\|\cdot\| := \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ とすると、 $\|\cdot\|$ は Korn の不等式より $\mathbf{V}$ のノルムとなる。 $\mathbf{V}$ の共役空間 $\mathbf{V}'$ とその共役対を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ と書く。ここで、(7) で定めた制約集合 $Z \subset \mathcal{S}^d$ を改めて、 H 上の制約集合として

$$\begin{aligned} K_M(t) &:= \{\tau \in H : |\tau^D| \leq g(t) \text{ a.e. in } \Omega\}, \\ K(t; \mathbf{v}) &:= K_M(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \quad \text{for } t \in [0, T] \end{aligned} \quad (8)$$

と定める。このとき、発展包含 (1) は H 上の抽象発展包含に書き直される。

$$B\sigma'(t) \in -\partial I_{K(t; \mathbf{v})}(\sigma(t)) + \varepsilon(\mathbf{v}(t)) \quad \text{in } H \quad \text{for a.a. } t \in (0, T).$$

さらに、運動方程式 (2) を弱形式に書き直して、以下の仮似変分不等式 (QVI) を得る：

$$\sigma(t) \in K(t; \mathbf{v}) \text{ for all } t \in [0, T], \quad (9)$$

$$(B\sigma'(t), \sigma(t) - \tau)_H \leq (\varepsilon(\mathbf{v}(t)), \sigma(t) - \tau)_H \text{ for all } \tau \in K(t; \mathbf{v}), \text{ for a.a. } t \in (0, T), \quad (10)$$

$$\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \nu a(\mathbf{v}(t), \mathbf{z}) = -(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{z}))_H \text{ for all } \mathbf{z} \in \mathbf{V}, \text{ for a.a. } t \in (0, T), \quad (11)$$

$$\sigma(0) = \sigma_0 \text{ in } H, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \text{ in } \mathbf{H}. \quad (13)$$

以下を仮定する。仮定 (A2) は技術的な理由による仮定であり、弾性係数 B は単位行列、 ν は正の定数、制約集合の平行移動は線形としている (線形移動硬化則)。

$$(A1) \quad \sigma_0 \in K_M(0) \subset H, \quad \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H};$$

$$(A2) \quad B = E_{d \times d}, \quad \nu > 0, \quad \mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^d; \mathcal{S}^d);$$

$$(A3) \quad g \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad g(t) \geq 0 \text{ a.e. in } \Omega, \text{ for all } t \in [0, T].$$

仮定 (A1)–(A3) のもと、(QVI) を満たし、かつ

$$\sigma \in W^{1,2}(0, T; H), \quad \mathbf{v} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}') \cap C([0, T]; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}).$$

である $(\sigma, \mathbf{v})$ がただ一つ存在する (cf. [1, 2]).

最後に証明の概説を述べる。応力テンソル σ に関する変分不等式 (9), (10), (12) において、 $\mathbf{v}$ を既知とした時の解作用素 $S_1 : \mathbf{v} \mapsto \sigma$ と、変位ベクトル $\mathbf{v}$ に関する運動方程式 (10), (12) において、 σ を既知とした時の解作用素 $S_2 : \sigma \mapsto \mathbf{v}$ を考える。2つの解作用素が well-defined であることを示し、合成写像 $S_2 \circ S_1$ が縮小写像であることが得られれば Banach の不動点定理より (QVI) の解の存在と一意性が保証される。

この証明でポイントになる点が2つある。1つ目は解作用素 S_1 の well-defined を示す部分である。変分不等式 (9), (10) の制約集合が時間に依存するため、時間に依存する発展方程式の抽象論が適用できる ([4, 8])。2つ目は解作用素の縮小性を示す部分である。制約集合 $K(t; \mathbf{v})$ が $\mathbf{v}$ に依存するため、試験関数として解の差を選ぶという一般的な方法が適用できない。そのため試験関数の選び方に工夫が必要になる。さらに、工夫して選んだ試験関数は、制約集合の構造上、試験関数の中に時間積分の項が現れるため、解作用素の縮小性の評価の計算に注意が必要になる。

References

- [1] Y. Akagawa, T. Fukao, and R. Kano, Time-dependence of the threshold function in the perfect plasticity model, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **32** (2023), 371–398.
- [2] Y. Akagawa and K. Matsui, Projection scheme for a perfect plasticity model with a time-dependent constraint set, *J. Math. Anal. Appl.*, **542** (2025), Article 128838, 22 pp.
- [3] G. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1976.
- [4] N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic variational inequalities, *Israel J. Math.*, **22** (1975), 304–331.
- [5] J. J. Moreau, Evolution problem associate with a moving convex set in a Hilbert spaces, *J. Differential Equations*, **26** (1977),
- [6] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 49, American Mathematical Society, 1997.
- [7] A. Visintin, Mathematical models of hysteresis, pp. 1-123 in *“The Science of Hysteresis”*, Vol. I, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [8] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **23** (1976), 491–515.