

空間次元の偶奇による非圧縮性 Navier–Stokes 流の時間発展の相違

山本 征法 (群馬大学)*

全空間 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) における非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \Delta u - \nabla p, & \nabla \cdot u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

解 $u = (u^1, \dots, u^n)(t, x)$, $p = p(t, x)$ は流速と圧力を表す．十分に小さくかつ非圧縮性条件を持つ初期値を取れば, 時間大域解で $1 \leq q \leq \infty$, $\gamma_q = \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{q})$ として

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\gamma_q} \quad (2)$$

なるものが存在する．熱方程式の解より減衰が速いのは質量保存則 $\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx = 0$ による．さらに, $\lambda^{n+m}U_m(\lambda^2 t, \lambda x) = U_m(t, x)$ かつ $\|u(t) - \sum_{m=1}^n U_m(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma_q - \frac{n}{2}} \log t)$ ($t \rightarrow +\infty$) なる函数 U_m が得られる [1, 2]. この評価が本質であれば, $\lambda^{2n+1}K_{n+1}(\lambda^2 t, \lambda x) = K_{n+1}(t, x)$ かつ $\|u(t) - \sum_{m=1}^n U_m(t) - K_{n+1}(t) \log t\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma_q - \frac{n}{2}})$ ($t \rightarrow +\infty$) なる K_{n+1} が導出されるはずである．高次の漸近展開には解のモーメントの可積分性が必要で, そのために初期渦 $\omega_0^{ij} = \partial_i u_0^j - \partial_j u_0^i$ に適当な条件を与える．流速と異なり, 渦度の空間遠方での減衰は初期値によって制御可能であり, 渦度 $\omega^{ij} = \partial_i u^j - \partial_j u^i$ に関する重み付き評価

$$\|\omega(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\gamma_q-1}, \quad \| |x|^{2n+1} \omega(t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\gamma_q}(1+t)^{-\frac{1}{2}+n} \quad (3)$$

が知られている [3]. また, ω_0^{*j} を第 j 列として Biot–Savart 則 $u_0^j = -\nabla(-\Delta)^{-1} \cdot \omega_0^{*j}$ により初期渦から初期流速を再現できる．まず, 空間次元が偶数の場合は次の命題が成り立つ．

命題 1 ([4]) $n \geq 2$ を偶数とする． $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が (2)(3) の成立に十分なだけ小さいとし $|x|^{2n+1}\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \omega_0 dx = 0$ ($|\alpha| \leq 1$) とする．このとき $U_m, K_m \in C((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$ で $\lambda^{n+m}(U_m, K_m)(\lambda^2 t, \lambda x) = (U_m, K_m)(t, x)$ ($\lambda > 0$) および

$$\left\| u(t) - \sum_{m=1}^{2n} U_m(t) - \sum_{m=n+1}^{2n} K_m(t) \log t \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = o(t^{-\gamma_q-n}) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

を満たすものが一意に存在する．さらに $|x|^{2n+2}\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とすると (4) の左辺は $O(t^{-\gamma_q-n-\frac{1}{2}}(\log t)^2)$ ($t \rightarrow +\infty$) で評価される．

なお, 最初の対数項 K_{n+1} を導出するには $|x|^{n+2}\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定すれば十分であり, これは概ね $|x|^{n+1}u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に相当する．また, 低階モーメントの消失は非圧縮性流体の渦が自然に満たす性質である．一方, 奇数次元では次が成り立つ．

* 〒376-0052 群馬県桐生市天神町 1-5-1 群馬大学大学院理工学府
e-mail: mk-yamamoto@gunma-u.ac.jp

定理 2 $n \geq 3$ を奇数とし, 初期渦に対して命題 1 の前半と同様の条件を課すと, $U_m \in C((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$ で $\lambda^{n+m} U_m(\lambda^2 t, \lambda x) = U_m(t, x)$ ($\lambda > 0$) および

$$\left\| u(t) - \sum_{m=1}^{2n} U_m(t) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = o(t^{-\gamma_q - n}) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (5)$$

を満たすものが一意に存在する. さらに $|x|^{2n+2} \omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とすると (5) の左辺は $O(t^{-\gamma_q - n - \frac{1}{2}} \log t)$ ($t \rightarrow +\infty$) で評価される.

つまり対数の冪が一つ下がる. これらの証明には, (1) を積分方程式に書き換えた

$$\begin{aligned} u^j(t) = & -\nabla(-\Delta)^{-1} G(t) * \omega_0^{*j} - \int_0^t \mathcal{R}^j \mathcal{R} G(t-s) * \mathcal{I}[u](s) ds \\ & - \int_0^t G(t-s) * \mathcal{I}^j[u](s) ds \end{aligned} \quad (6)$$

に Taylor の定理と繰り込みを適用する. ただし $\mathcal{R}^j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ は Riesz 変換であり, また $\mathcal{I}^j[u] = \omega^{*j} \cdot u$ である. この方程式は渦度の方程式に Biot–Savart 則を適用すれば得られる. Taylor の定理により, u^j および Ω^{ij} の低階の漸近項は

$$\begin{aligned} U_m^j(t) = & - \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{\nabla^\alpha \nabla(-\Delta)^{-1} G(t)}{\alpha!} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\alpha \omega_0^{*j}(y) dy \\ & - \sum_{2l+|\beta|=m} \frac{\partial_t^l \nabla^\beta \mathcal{R}^j \mathcal{R} G(t)}{l! \beta!} \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (-s)^l (-y)^\beta \mathcal{I}[u](s, y) dy ds \\ & - \sum_{2l+|\beta|=m} \frac{\partial_t^l \nabla^\beta G(t)}{l! \beta!} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (-s)^l (-y)^\beta \mathcal{I}^j[u](s, y) dy ds \end{aligned}$$

および $\Omega_{m+1}^{ij} = \partial_i U_m^j - \partial_j U_m^i$ ($1 \leq m \leq n$) で与えられる. これらの x に関する偶奇が m で決まることが重要である. つまり m が偶数のとき $U_m(t, -x) = U_m(t, x)$ であり, 奇数のときは $U_m(t, -x) = -U_m(t, x)$ である. なお, Ω_{m+1} の偶奇は U_m とは逆転する. これらを (6) に繰り込んで Taylor 展開すると, 上記の解のモーメントに加えて $3 \leq m+p \leq n+2$ として係数

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (-s)^l (-y)^\beta (\Omega_p^{*j} \cdot U_m)(1+s, y) dy ds \\ & = \int_0^t s^l (1+s)^{-\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-\frac{m}{2}+\frac{|\beta|}{2}} ds \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^l (-y)^\beta (\Omega_p^{*j} \cdot U_m)(1, y) dy \end{aligned}$$

が現れる. この時間積分が対数発展するとき, 対応する空間積分に着目する.

参考文献

- [1] Carpio, A., SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 449–475.
- [2] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 523–544.
- [3] Kukavica, I., Reis, E., J. Differential Equations **250** (2011), 607–622.
- [4] Yamamoto, M., Nonlinear Anal. Real World Appl. **85** (2025), 104350.