1 次元準線型 Keller–Segel 方程式のエントロピー生成の評価とその応用

藤江 健太郎 (東北大学大学院理学研究科)[*1]
Tomasz Cieślak (IMPAN)
細野 竜也 (大阪公立大学, Université Savoie Mont Blanc)

1. 本研究の目的

次の 1 次元準線型 Keller–Segel 方程式の初期値境界値問題 (KS) を考える:

$$\begin{cases} u_t = \partial_x \left(D(u)\partial_x u - S(u)\partial_x v \right) & \text{in } (0,T)\times(0,1), \\ v_t = \partial_{xx} v - v + u & \text{in } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_x u = \partial_x v = 0 & \text{on } (0,T)\times\{0,1\}, \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad v(0,\cdot) = v_0 & \text{in } (0,1). \end{cases} \tag{KS}$$

ただし, 初期値 $(u_0, v_0) \in (W^{1,\infty}(0,1))^2$ は非負であり, 函数 D, S は次の形に限定する:

$$D(u) = (1+u)^{-p}, \quad S(u) = u(1+u)^{-q} \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

(KS) の非負古典解は質量保存則を満たす:

$$\|u(t)\|_{L^1(0,1)} = \|u_0\|_{L^1(0,1)}, \qquad t \in (0,T).$$

さらに, Lyapunov 汎函数の存在が知られている:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(u,v) + \int_0^1 |v_t|^2 dx + \int_0^1 S(u) \cdot \left| \frac{D(u)}{S(u)}\partial_x u - \partial_x v \right|^2 dx = 0. \tag{1}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u,v) &:= \int_0^1 G(u)\,dx - \int_0^1 uv\,dx + \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(0,1)}, \\ G(s) &:= \int_1^s \int_1^\sigma \frac{D(\tau)}{S(\tau)}\,d\tau\,d\sigma. \end{aligned}$$

本研究の目的は, $p - q = 1$ のときの (KS) の非負古典解の時間大域存在の導出である.

2. 本研究の背景とアイデア

問題 (KS) を多次元の設定 (空間次元 $n \geq 2$) で考えた場合には, 保存量である質量 $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ に注目すると, 指数 p, q, n の関係によって解の時間大域可解性が分類される. 特に, 臨界の場合 $(1 + p - q = \frac{2}{n})$ には, 質量の大小によって解挙動が変化することが知られている. このような解の時間大域存在・爆発解の存在の解析において, Lyapunov 汎函数が大きな役割を果たすことが知られている ([1]).

[*1] e-mail: `fujie@tohoku.ac.jp`

多次元における先行研究を踏まえると, 空間1次元においては

$$1+p-q=\frac{2}{1} \quad \Longleftrightarrow \quad p-q=1$$

が「臨界条件」の候補である. 一方で, 空間1次元のときにはSobolevの埋め込みの特殊性に起因して, Lyapunov汎函数を用いた解析手法が有効に働かない.

本研究のアイデアは, (KS) に対して「エントロピー生成の評価」を導出し, それによって得られるアプリオリ評価を使うことである.

3. エントロピー生成の評価と主結果

(KS) のエントロピー生成の関係式が次のように得られる:

命題 1 ([2, 4])**.** (u,v) を $(0,T)\times(0,1)$ 上の (KS) の解とする. このとき, 次が成立する:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t))+\mathcal{D}(u(t),v(t)) \\
&=\int_0^1 \frac{S(u)D(u)(v+v_t)^2}{4}\,dx \\
&\quad+\int_0^1 \left(\frac{D(u)}{S(u)}\partial_x u_x-\partial_x v\right)\cdot\frac{(D(u))^2S''(u)}{2S(u)}|\partial_x u|^2\partial_x u\,dx. \qquad (2)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(t)) &:= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(D(u))^2}{S(u)}|\partial_x u|^2\,dx-\int_0^1 \Psi(u)\,dx, \\
\Psi(\phi) &:= \int_1^\phi \left(\int_1^r \frac{\tau D(\tau)S'(\tau)}{S(\tau)}\,d\tau+rD(r)\right)dr, \\
\mathcal{D}(u(t),v(t)) &:= \int_0^1 S(u)D(u)\left|\partial_x\left(\frac{D(u)}{S(u)}\partial_x u\right)-\partial_{xx}v+\frac{(v+v_t)}{2}\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

この関係式から得られるアプリオリ評価を用いることで, 次の主張が得られる.

定理 1 ([3])**.** $(p,q)=(2,1)$ とする. このとき, (KS) の古典解は時間大域的に存在する.

注意 1. $(p,q)=(2,1)$ は臨界条件の候補である $p-q=1$ を満たすが, 質量の大小に関係なく解が時間大域的に存在し, 臨界現象は起こらない. $(p,q)=(1,0)$ でも同様の結果が得られている ([2]).

参考文献

[1] N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao and M. Winkler, *Toward a mathematical theory of Keller-Segel models of pattern formation in biological tissues,* Math. Models Methods Appl. Sci. **25** (2015), no. 9, 1663–1763.

[2] T. Cieślak and K. Fujie, *No critical nonlinear diffusion in 1D quasilinear fully parabolic chemotaxis system,* Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 6, 2529–2540.

[3] T. Cieślak, K. Fujie and T. Hosono, *Nonlinear Fisher information, corresponding functional inequalities and applications,* arXiv:2509.01475

[4] K. Fujie, *Energy-like functional in a quasilinear parabolic chemotaxis system,* in *Geometric properties for parabolic and elliptic PDEs*, 67–77, Springer INdAM Ser., 47, Springer, Cham.