コンパクト台でない特異ポテンシャルを伴う時間減衰調和振動子の下での逆問題について

原田　泰志　(東京理科大学)

本論文ではポテンシャル関数によって摂動された二体量子系に対する逆問題を扱う．先行研究 [1] では有界なポテンシャルとコンパクト台をもつ特異ポテンシャルの和であったのに対して，本論文ではコンパクト台をもつとは限らない特異ポテンシャルの場合を扱う．これは, [1] の Remark 1.2 で成り立つと証明無しで述べられていたことであるが, 実際に証明を与える.

$n \geq 2$ とし, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = -i(\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$ とおく．ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする．本論文では, 次の $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の時間依存型自由ハミルトニアンによって記述される量子系を考える.

$$H_0(t) = p^2/2 + k(t)x^2/2.$$

ここで, $k(t) = \begin{cases} \omega^2, & \text{if } |t| < r_0, \\ \sigma/t^2, & \text{if } |t| \geq r_0 \end{cases}$ と与えられる. ただし, $0 < \sigma < 1/4$, $\omega > 0$, $r_0 > 0$ とする．また, 簡単のため

$$0 < \lambda = (1 - \sqrt{1 - 4\sigma})/2 < 1/2$$

とする．ここで, 実数値ポテンシャル関数に課される仮定を述べる. これらは, $H_0(t)$ を摂動する乗算作用素として働くものである.

仮定 1. ポテンシャル関数 V は

$$V(x) = V_{\mathrm{sing}}(x)$$

とし, $V_{\mathrm{sing}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\infty > q \begin{cases} = 2, & \text{if } n \leq 3, \\ > n/2, & \text{if } n \geq 4 \end{cases}$$

かつ, $\langle x \rangle^\rho V_{\mathrm{sing}} \langle p \rangle^{-2}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素である. ただし, $\rho > 1/(1-\lambda)$, $\langle \cdot \rangle = \sqrt{1 + |\cdot|^2}$ とする.

これらより, 全ハミルトニアンを

$$H(t) = H_0(t) + V(x)$$

と定める．$H(t)$ や $H_0(t)$ から生成されるプロパゲーターの存在性は [2] の Theorem 6 の Remark (a) によりこの仮定のもと保証されていて, それらを $U(t,s), U_0(t,s)$ とし, 波動作用素は

$$W^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} U(t,0)^* U_0(t,0)$$

と表せる. また, 散乱作用素は次のように定義される.

$$S(V) = (W^+)^* W^-.$$

主定理. V_1, V_2 は仮定 1 を満たすとする. このとき, $S(V_1) = S(V_2)$ ならば $V_1 = V_2$ が成立する.

参考文献

[1] A. Ishida. Quantum inverse scattering for time-decaying harmonic oscillators, Inverse Probl. Imaging Problems 19 (2025),no.2,282-296

[2] K. Yajima schrödinger evolution equations with magnetic fields, J. Analyse Math., 56(1991), 29-76