Global existence and boundedness of solutions to quasilinear attraction-repulsion chemotaxis systems with flux limitation*

長谷川 和輝　(東京理科大・理 M2)

次の偏微分方程式系の初期値境界値問題を考える:

$$
\text{(P)}\qquad
\begin{cases}
u_t = \nabla\cdot\left(\nabla u - \dfrac{\chi u^{p-1}}{(1+|\nabla v|^2)^k}\nabla v + \dfrac{\xi u^{q-1}}{(1+|\nabla w|^2)^\ell}\nabla w\right), & x\in\Omega,\ t>0,\\
0 = \Delta v + \alpha u^\lambda - \beta v, & x\in\Omega,\ t>0,\\
0 = \Delta w + \gamma u^\theta - \delta w, & x\in\Omega,\ t>0,\\
\nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = \nabla w\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}$ は有界開区間, または $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ は原点を中心とする開球, $p,q\geq 2$, $k,\ell\geq 0$, $0<\lambda,\theta\leq 1$, $\chi,\xi,\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ は定数, ν は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル, u_0 は非負値で球対称な既知関数で, u,v,w は x,t を変数とする非負値の未知関数である.

問題 (P) は流束制限付き誘引・反発型走化性方程式系とよばれており, 流束制限がない場合 $(k=\ell=0)$ の解の有界性と爆発に関する先行研究として以下があげられる ([**1**]):

- $p<q$ または $[p=q$ かつ $\chi\alpha-\xi\gamma<0]$ $\implies$ $\forall u_0\in C(\overline{\Omega}),\ \sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}<\infty$ (解の有界性).
- $p>q$ または $[p=q$ かつ $\chi\alpha-\xi\gamma>0]$ $\implies$ $\exists u_0\in C(\overline{\Omega})$ s.t. $\lim_{t\nearrow {}^\exists T}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}=\infty$ (解の爆発).

このように, 流束制限がない場合 $(k=\ell=0)$ の解の有界性と爆発は, 誘引項と反発項に現れる冪や係数に関する大小関係によって分類される. これに対して, 本研究では,

流束制限を付けた場合 $(k,\ell\geq 0)$ に, その影響を反映させた解の有界性を導くことができるか?

という問いについて考える. 上記の問いに対する解答として, 以下の結果を得た.

定理

$\Omega\subset\mathbb{R}$ を有界開区間とし, $p,q\geq 2$, $k\geq 0$, $0\leq\ell<\frac{1}{2}$, $\lambda=\theta=1$ とする. また, 初期値 $u_0\in C(\overline{\Omega})$ は

$$
\|u_0\|_{L^1(\Omega)}<\infty\quad(\ell=0\text{ のとき}),\qquad \|u_0\|_{L^1(\Omega)}<\frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(\frac{1}{2\ell}\right)^{\frac{1}{\ell}}-1}\quad(0<\ell<\tfrac{1}{2}\text{ のとき})
$$

を満たすとし, さらに, 次の (**I-1**), (**I-2**) のいずれかを仮定する:

$$
(\mathbf{I\text{-}1})\ p<q,\qquad (\mathbf{I\text{-}2})\ p=q\text{ かつ }\chi\alpha-\xi\gamma\left\{(1+\gamma^2\|u_0\|_{L^1(\Omega)}^2)^{-\ell}-2\ell\right\}<0.
$$

このとき, 問題 (P) の時間大域的古典解 (u,v,w) が一意的に存在して有界である.

証明の鍵は, 解の評価をする際に部分積分により現れる $\nabla(|\nabla w|^2)\cdot\nabla w$ の扱いである. $n=1$ の場合, $\nabla(|\nabla w|^2)\cdot\nabla w = 2w_x^2 w_{xx}$ と書けることから, 第 3 方程式を用いた処理が可能となる. なお, $n\geq 2$ の場合でも, $0<\lambda,\theta<1$ と球対称性を仮定することにより同様の結果が得られたので, 報告する予定である.

参考文献

[1] Y. Chiyo and T. Yokota. *Boundedness and finite-time blow-up in a quasilinear parabolic–elliptic–elliptic attraction-repulsion chemotaxis system.* Z. Angew. Math. Phys. **73** (2022), no. 2, Paper No. 61, 27 pp.

*本研究は千代 祐太朗 氏 (東京理科大・理), 小波津 晶平 氏 (東京理科大・理), 横田 智巳 氏 (東京理科大・理) との共同研究に基づく.