Characterization of the wave front set of solutions to the fractional Schrödinger equation with potentials

金井　拓海　(東京理科大学大学院 理学研究科) *

1. 導入

本講演では，分数冪ラプラシアン $(-\Delta)^{\theta/2}$ $(0 < \theta < 2)$ とポテンシャル $V(x)$ を用いて表される Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u = (-\Delta)^{\theta/2}u + V(x)u, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

について考察する．分数冪ラプラシアン $(-\Delta)^{\theta/2}$ は Fourier 変換を用いて，

$$(-\Delta)^{\theta/2}f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[|\xi|^\theta \mathcal{F}[f]\right](x)$$

で定義される．(1) は，パラメータ $0 < \theta < 2$ の値によってその性質が異なる．$\theta = 1$ の場合は，主要部は波動方程式に一致し，ポテンシャルの増大度がいかなるものであっても，解の特異性は古典軌道に沿って伝播することが Hörmander によって古くから知られている．一方，$\theta = 2$ の場合は，通常のラプラシアンを持つ Schrödinger 方程式となる．この場合について，Nakamura[3] や Kato-Ito[2] において，通常のラプラシアン（$\theta = 2$ の場合に相当）と劣二次のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式について，解の波面集合の特徴付けが行われている．本講演では，分数冪 Schrödinger 方程式の解の波面集合の特徴づけを行い，方程式 (1) の解の特異性の振る舞いを解明する．

仮定 (ポテンシャル V の仮定)**.** ポテンシャル $V(x)$ は $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する実数値関数とする．さらに，$1 < \theta < 2$ の場合は，ある $\nu < \frac{\theta}{\theta-1}$ が存在して，任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し，ある定数 $C_\alpha > 0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{\nu - |\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

が成立する．

定義 (波面集合)**.** $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ であるとは, x_0 の近傍上で $\chi(x) \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $C_N > 0$ が存在して

$$|\widehat{\chi f}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma$$

をみたすことである．

定義 (波束変換)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ と $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し，波束変換 $W_\varphi[f](x,\xi)$ を以下で定義する．

$$W_\varphi[f](x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy.$$

* 本講演の内容は，杉山裕介氏（東京理科大学），村松亮氏（東京理科大学）との共同研究に基づく．

2. 主定理

分数冪ラプラシアンの次数に応じたポテンシャルの増大度の下で，(1) の解の波面集合を特徴付ける主定理を以下に示す．

主定理 ([1])**.** $u(t,x)$ を $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解とする．ポテンシャル $V(x)$ は上記の仮定を満たし，パラメータ b は $0<b<(2-\theta)/2$ を満たすとする．このとき，以下の主張 (i), (ii) は同値である．

(i) $(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t))$.

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N\in\mathbb{N}$, 任意の $a\geq 1$, そして任意の $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対してある定数 $\lambda_0>0, C_{N,a,\varphi}>0$ が存在して,

$$|W_{\varphi_\lambda}[u_0](x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi))|\leq C_{N,a,\varphi}\lambda^{-N} \tag{2}$$

が，$\lambda\geq\lambda_0, a^{-1}\leq|\xi|\leq a,\ x\in K,\ \xi\in\Gamma$ なるすべての λ,x,ξ に対して成立する．ただし，$\varphi_\lambda(x)=\lambda^{nb/2}\varphi(\lambda^b x)$ であり，$(x(s),\xi(s)):=(x(s;t,x,\lambda\xi),\xi(s;t,x,\lambda\xi))$ は以下の方程式の解である．

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}x(s)=\theta|\xi(s)|^{\theta-2}\xi(s), & x(t)=x,\\ \frac{d}{ds}\xi(s)=-\nabla_x V(x(s)), & \xi(t)=\lambda\xi.\end{cases} \tag{3}$$

さらに，ポテンシャルの増大度に関する仮定を強くした場合に，以下に示す命題が成り立つ．

命題 1. $1<\theta<2$ の場合は，ある $\nu<\frac{\theta}{2(\theta-1)}$ が存在して，任意の多重指数 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し，ある定数 $C_\alpha>0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(x)|\leq C_\alpha\langle x\rangle^{\nu-|\alpha|},\quad x\in\mathbb{R}^n$$

が成立すると仮定する．また，b を $0<b<(2-\theta)/2$ を満たすようにとる．このとき，ポテンシャルを含まないように定義された以下の特性曲線 $(\tilde{x}(s),\tilde{\xi}(s))$ に対して，主定理の主張 (i), (ii) は同値である．

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}\tilde{x}(s)=\theta|\tilde{\xi}(s)|^{\theta-2}\tilde{\xi}(s), & \tilde{x}(t)=x,\\ \frac{d}{ds}\tilde{\xi}(s)=0, & \tilde{\xi}(t)=\lambda\xi.\end{cases} \tag{4}$$

さらに，$0<\theta\leq 1$ の場合は，初期時刻の波面集合を用いて，任意の時刻における波面集合を特徴付ける次の命題が成立する．

命題 2. $u(t,x)$ を $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解とし，ポテンシャル $V(x)$ は上記の命題の条件を満たすとする．このとき，分数冪ラプラシアンの指数 θ が $\theta=1$ の場合は,

$$WF(u(t))=\chi_{t,0}(WF(u_0)) \tag{5}$$

が成立する．ただし，$\chi_{t,0}$ は (4) の解を用いて,

$$\chi_{\tau,t}(x,\xi)=(\tilde{x}(\tau;t,x,\xi),\tilde{\xi}(\tau;t,x,\xi)) \tag{6}$$

で定義される写像である．また，$0<\theta<1$ の場合は,

$$WF(u(t))=WF(u_0) \tag{7}$$

が成立する．

参考文献

[1] Kanai Takumi, Muramatsu Ryo and Sugiyama Yuusuke, Wave front set of solutions to the fractional Schrödinger equation. *arXiv preprint arXiv:2602.17406* (2026).

[2] Kato Keiichi and Ito Shingo, Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential. *SUT J. Math.* **50** (2014), no. 2, 383 – 398.

[3] Nakamura Shu, Semiclassical singularities propagation property for Schrödinger equations. *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 177 – 211.