コンパクト台でない特異ポテンシャルを伴う時間減衰調和振動子の下での波動作用素の存在について

小栗 秀介 (東京理科大学)

1 背景と研究目的

時間減衰調和振動子（$k(t) \sim \sigma/t^2$）を伴う系では，粒子の空間的伝播が通常の自由運動より緩やか（$x(t) \sim t^{1-\lambda}$）になり，波動作用素の存在条件が $\rho > 1/(1-\lambda)$ へとシフトする．本研究の目的は，先行研究 [1] で示された波動作用素の存在を，局所特異性と非コンパクト台を併せ持つようなより広いクラスのポテンシャルに対しても示すことである．

2 定式化

$n \geq 2$ とし，自由ハミルトニアンを $H_0(t) = p^2/2 + \sigma x^2/2t^2$ $(|t| \geq r_0)$ と定める．ここで $\lambda = (1-\sqrt{1-4\sigma})/2$ とする．全ハミルトニアンを $H(t) = H_0(t) + V(x)$ とし，ポテンシャル V に対して以下の仮定を置く．

- **仮定：** $V \in L^q(\mathbb{R}^n)$ （$n \leq 3$ で $q = 2, n \geq 4$ で $q > n/2$）.
- **減衰条件：** ある $\rho > 1/(1-\lambda)$ に対して $\langle x \rangle^\rho V \langle p \rangle^{-2} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

【主定理】 上記の仮定の下で波動作用素 $W^{\pm} = \text{s-lim}_{t\to\pm\infty} U(t,0)^* U_0(t,0)$ が存在する．

3 証明の概略

Cook-Kuroda の方法に基づき，$\|V(t^\lambda x) e^{-it^{1-2\lambda}p^2/2(1-2\lambda)}\phi\|$ の可積分性を示す．

3.1 Mehler 公式による評価式の変形

Mehler 公式から導かれるユニタリ作用素 $C(T), D(T)$ を用い，$U(t,0)^* U_0(t,0)$ を以下の形に書き換える

$$C(T)\widehat{U}(t,T)^* e^{-it^{1-2\lambda}p^2/2(1-2\lambda)} D(T).$$

ここで $\widehat{U}$ は $\widehat{H}(t) = p^2/2|t|^{2\lambda} + V(|t|^\lambda x)$ によって生成されるプロパゲーターである．この変形により，評価の対象は t^λ 倍にスケーリングされたポテンシャル $V(t^\lambda x)$ を含む項に限定される．

3.2 領域分割による評価

全空間を定義関数 F により，外側領域（$|x| > \varepsilon_0 t^{1-2\lambda}$）と内側領域（$|x| \leq \varepsilon_0 t^{1-2\lambda}$）に分けて評価する．

1. 外側領域（$|x| > \varepsilon_0 t^{1-2\lambda}$）：ポテンシャルの仮定 $\langle x \rangle^\rho V \langle p \rangle^{-2} \in \mathcal{B}\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)$ を利用する．空間減衰 $|V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-\rho}$ より $|V(t^\lambda x)| \lesssim t^{-\rho(1-\lambda)}$ に変換され，$\rho > 1/(1-\lambda)$ の仮定から可積分となる．

2. 内側領域（$|x| \leq \varepsilon_0 t^{1-2\lambda}$）：自由発展 $e^{-it^{1-2\lambda}p^2/2(1-2\lambda)}$ を，伝播評価と，交換子の評価を組み合わせることで，任意の自然数 N に対して $t^{-N(1-2\lambda)}$ で抑え，可積分性を示す．

以上より，全領域で可積分性が示され主定理が導かれる．

4 結論

本研究により，時間減衰調和振動子系における散乱理論が，局所特異性と非コンパクト台を併せ持つポテンシャルへと拡張された．本結果は，逆散乱解析や多体系への拡張に向けた理論的基盤となる．

参考文献

[1] A. Ishida and M. Kawamoto, Existence and nonexistence of wave operators for time-decaying harmonic oscillators, *Reports on Mathematical Physics* **85** (2020), no. 3, 335–350.