Applications of the theory for abstract semilinear evolution equations to several chemotaxis systems*

嵯峨 大翔　(東京理科大・理 M2)

Banach 空間 X 上の次の抽象発展方程式に対する可解性理論の走化性方程式系への応用を考える:

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U), \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

ここで, A は X における線形作用素で, 角 $\omega_A \in [0, \frac{\pi}{2})$ の角域作用素とする. すなわち,

$$\begin{aligned} &\sigma(A) \subset \Sigma_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg \lambda| < \omega\}, && \omega_A < \omega < \pi/2, \\ &\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le M_\omega |\lambda|^{-1}, && \lambda \notin \Sigma_\omega, \quad \omega_A < \omega < \pi/2 \end{aligned}$$

を満たすとする ($\sigma(A)$ は A のスペクトル集合, $M_\omega \ge 1$ は定数). また, F は $D(A^\theta) \subset X$ ($\theta \in [0,1)$) 上で局所 Lipschitz 連続な作用素である. さらに, $U_0 \in X$ で, U は t を変数とする X 値の未知関数である.

問題 (P) の時間局所解及び時間大域解の存在定理は Yagi [**2**] により確立されている. また, 問題 (P) に対する可解性理論を走化性方程式系に応用した研究には, Osaki–Yagi [**1**] がある. [**1**] では,

$$\text{(KS)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \\ v_t = \Delta v - v + u \end{cases}$$

に斉次 Neumann 境界条件を課した初期値境界値問題の可解性が, 1 次元の場合に示されている.

本研究では, [**1**] のように, 問題 (P) に対する可解性理論を次の 2 つの走化性方程式系に応用する:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + \xi \nabla \cdot (u \nabla w), \\ v_t = \Delta v + \alpha u - \beta v, \\ 0 = \Delta w + \gamma u - \delta w. \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), \\ v_t = \Delta v - v + w, \\ w_t = d\Delta w - w + auz, \\ z_t = \Delta z - uz + w. \end{cases}$$

これらの方程式系に斉次 Neumann 境界条件と初期条件を課した問題を, 滑らかな境界をもつ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 上で考える. ここで, $\chi, \xi, \alpha, \beta, \gamma, \delta, d, a > 0$ は定数である. なお, 問題 (I) と問題 (II) で, **非負の初期値 $\boldsymbol{u_0, v_0, w_0, z_0}$ に連続性を課した場合の可解性は既に示されている.**

本研究では, 上記 2 つの走化性方程式系の可解性に関する以下の結果を得た:

主結果 1

$n \in \{1,2,3\}$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ とし, $v_0 \in H^2(\Omega)$ は斉次 Neumann 境界条件を満たすとする. このとき, $C_{\mathrm{MR}}^{\frac{1}{3}} \chi\alpha - \xi\gamma < 0$ ($C_{\mathrm{MR}} > 0$ は最大正則性原理に現れる定数) ならば, 問題 (I) は時間大域解をもつ.

主結果 2

$n = 3$, $u_0, w_0, z_0 \in L^2(\Omega)$ とし, $v_0 \in H^2(\Omega)$ は斉次 Neumann 境界条件を満たすとする. このとき, $a \le 1$ ならば, 問題 (II) は時間大域解をもつ.

これらの結果では, **初期値 $\boldsymbol{u_0}$ 及び $\boldsymbol{w_0, z_0}$ のクラスを従来の結果よりも広げている.**

参考文献

[1] K. Osaki and A. Yagi. Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller–Segel equations. *Funkcial. Ekvac.* **44** (2001), 441–469.

[2] A. Yagi. Abstract Parabolic Evolution Equations and Their Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

*本研究は千代 祐太朗 氏 (東京理科大・理), 横田 智巳 氏 (東京理科大・理) との共同研究に基づく.