消散項を持つ非線形シュレディンガー方程式における漸近挙動 *

高木 昂大 (東京理科大学理学研究科数学専攻 修士課程 2 年)

次の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + iau + \mu|u|^{p-1}u = 0, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{NLDS}$$

について考察する. ここで $\mu = \pm 1$, $p > 1$ であり, $a > 0$ である. 本研究では (NLDS) の漸近挙動, 特に粗い初期データに対し時間大域解が散乱する (線形解に近づく) 速さ, 並びにその最適性について調べる.

まず, Ohta-Todorova [5] において, $1 + \frac{4}{n} \le p < 1 + \frac{4}{n-2}$ のときに H^1 スモールデータに対する時間大域解の存在が知られている. さらに, Inui [3] は時間大域解が散乱する場合に, 以下の減衰評価を示した.

$$\|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}u_+\|_{H^1} \le C \begin{cases} t^{(p-1)(\alpha+\epsilon)}e^{-apt} & \left(1 < p < 1 + \frac{4}{n}\right) \\ e^{-apt} & \left(1 + \frac{4}{n} \le p < 1 + \frac{4}{n-2}\right) \end{cases}$$

ここで $\epsilon > 0$ は任意, $\alpha = \frac{4-(n-2)(p-1)}{2(p-1)(p+1)} > 0$ である. さらに Aloui et al [1] により, この評価は以下のように改良された.

$$\|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}\varphi_+\|_{H^1} \le Ce^{-apt}, \quad \text{if} \quad 1 < p < 1 + \frac{4}{n}$$

(特に, これら H^1 における誤差の減衰率は上から評価している減衰率のスモールオーダーであることまでわかっている).

次に主結果で用いるモジュレーション空間を導入する.

定義 (モジュレーション空間 $M^{1,1}$)**.** $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. モジュレーション空間 $M^{1,1}$ を以下で定める:

$$M^{1,1} := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|f\|_{M^{1,1}} := \iint \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{g(y-x)}e^{-i\xi\cdot y}dy \right| dxd\xi < \infty \right\}.$$

注意: モジュレーション空間の定義は窓関数 g の取り方によらない.

本稿の主結果は以下である.

定理 1. p を奇数, $u_0 \in M^{1,1}$ とする. (NLDS) の解 $u \in C([0,\infty); M^{1,1})$ が, 十分大きい $C, T > 0$ と十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して次を満たすと仮定する:

$$\|u(t)\|_{M^{1,1}} \le Ce^{-\frac{ap+\varepsilon}{2p-1}t}, \qquad t > T \tag{1}$$

このとき, ある $\phi_+ \in M^{1,1}$ と定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し, 以下の評価が成り立つ:

$$C_1\langle t\rangle^{-\frac{n(p-1)}{2}}e^{-apt} \le \|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}\phi_+\|_{L^2} \le C_2\langle t\rangle^{-\frac{n(p-1)}{2}}e^{-apt}, \quad t > T$$

次の命題によって、少なくともスモールデータの時は定理 1 の仮定を満たす時間大域解が存在する.

---

* 本研究は瀧澤 駿 氏（東京理科大学大学院理学研究科数学専攻）との共同研究に基づく.

命題 1. p 奇数とし, $u_0 \in M^{1,1}$ で $\|u_0\|_{M^{1,1}}$ は十分小さいとする. このとき (NLDS) の $u \in C([0,\infty); M^{1,1})$ なる解が一意存在する. さらにこの解 u は評価 (1) を満たす.

注意: (1) 定理 1 において, 解が散乱することのみを結論づけるのであれば仮定を $\|u(t)\|_{M^{1,1}} \le Ce^{-\frac{a+\varepsilon}{p}t}$ $\left(\frac{a+\varepsilon}{p} < \frac{ap+\varepsilon}{2p-1}\right)$ へ弱めることができる.
(2) 空間 $M^{1,1}$ の元は正則性が低い. したがって, エネルギー散乱は扱えない.

初期値の正則性を高めることで, 以下の結果も得られる. ここで, $\Sigma = H^\beta \cap \mathcal{F}H^\beta$ $(\beta = [n/2]+1)$ とする.

定理 2. p を奇数または $p > [n/2]+1$ とし, $u_0 \in \Sigma$ とする. (NLDS) の解 $u \in C([0,\infty); \Sigma)$ が, 十分大きい $C, T > 0$ に対して次を満たすと仮定する:

$$\|e^{-it\Delta}u(t)\|_\Sigma \le Ce^{-at}, \qquad t > T \tag{2}$$

このとき, ある $\Phi_+ \in \Sigma$ と定数 $C_3, C_4 > 0$ が存在し, 任意の $s \in [0,1]$ に対して以下の評価を満たす.

$$C_3\langle t\rangle^{-\frac{n(p-1)}{2}}e^{-apt} \le \|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}\Phi_+\|_{H^s} \le C_4\langle t\rangle^{-\frac{n(p-1)}{2}}e^{-apt}, \quad t > T$$

命題 2. p は定理 2 と同様で, $u_0 \in \Sigma$ で $\|u_0\|_\Sigma$ は十分小さいとする. このとき (NLDS) の $u \in C([0,\infty); \Sigma)$ なる解が一意存在する. さらにこの解 u は評価 (2) を満たす.

注意: 定理 2 において, 解が散乱することのみを結論づけるのであれば, 解に対する仮定を $\|e^{-it\Delta}u(t)\|_\Sigma \le Ce^{-\frac{a+\varepsilon}{p}t}\left(\frac{a+\varepsilon}{p} < a\right)$ へと弱めることができる.

先行研究では, ストリッカーツ評価を用いて消散項由来の減衰オーダー e^{-apt} を示していた. 本研究では, 指数減衰に加え, 分散性由来の減衰オーダー $\langle t\rangle^{-\frac{n(p-1)}{2}}$ を抽出するため, MDFM 分解と呼ばれる手法を用いている. この手法は, シュレディンガー群 $e^{it\Delta}$ を以下のように分解するものである.

$$e^{it\Delta} = M(t)D(t)\mathcal{F}M(t),$$

ここで, $M(t) = e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$ は変調作用素, $D(t)f(x) = (2it)^{-\frac{n}{2}}f\left(\frac{x}{2t}\right)$ は伸長作用素である. この手法は漸近挙動の解析として, 例えば Tsutsumi–Yajima[7], Ozawa [6], Hayashi–Naumkin [2], Kita [4] などで用いられている.

参考文献

[1] L. Aloui, S. Jbari and S. Tayachi, *Asymptotic behavior and life-span estimates for the damped inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation,* Evol. Equ. Control Theory **13** (2024), no. 4, 1126–1150.

[2] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations,* Amer. J. Math. **120** (1998), no. 2, 369–389.

[3] T. Inui, *Asymptotic behavior of the nonlinear damped Schrödinger equation,* Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 2, 763–773.

[4] N. Kita, *Sharp L^r asymptotics of the small solutions to the nonlinear Schrödinger equations,* Nonlinear Anal. **52** (2003), no. 4, 1365–1377.

[5] M. Ohta and G. Todorova, *Remarks on global existence and blowup for damped nonlinear Schrödinger equations,* Discrete Contin. Dyn. Syst. **23** (2009), no. 4, 1313–1325.

[6] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension,* Comm. Math. Phys. **139** (1991), no. 3, 479–493.

[7] Y. Tsutsumi and K. Yajima, *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations,* Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), no. 1, 186–188.