空間１次元準線形波動方程式の古典解の最大存在時刻の評価 *

山ノ井太朗 (東京理科大学大学院)

以下の空間 1 次元準線形波動方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} u_{tt} - (c(u)^2 u_x)_x = 0, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x),\, u_t(0,x) = \varepsilon\psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $c(u) = (1 + A|u|^{p-2}u)^{\frac{1}{2}}$, $A > 0$, $p \geq 2$ である．

(1) の解の最大存在時刻 T^* を以下で定める．

$$T^* = \sup\{T > 0 \mid \sup_{t\in[0,T)} (\|u(t)\|_{L^\infty} + \|u_t(t)\|_{L^\infty} + \|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|c(u(t))^{-1}\|_{L^\infty}) < \infty\}.$$

先行研究 Haruyama-Takamura [1] では (1) と形式的に同値な初期値問題について, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $T^* \leq C\varepsilon^{-(p-1)}$ が示されている．彼らは, d'Alembert の公式と逐次代入の方法に基づいて証明を行った．対して本講演では,Lax [2] の特性曲線と Riemann 不変量を用いた方法に基づいて $C\varepsilon^{-(p-1)} \leq T^* \leq C'\varepsilon^{-(p-1)}$ を示す．上からの評価は有限時間爆発を, 下からの評価は長時間存在を保証するものである．有限時間爆発の証明に用いる $c'(u)$ の下からの評価を示す際に, 長時間存在を用いて十分大きい時刻で考えるのが鍵である．

定理 1 (長時間存在)**.** $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}), \psi \in C_0^1(\mathbb{R})$ とする．このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し,

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad ならば \quad C\varepsilon^{-(p-1)} \leq T^*$$

が成り立つ．ただし, $C > 0$ は ε に無関係な正定数である．

定理 2 (有限時間爆発)**.** $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}), \psi \in C_0^1(\mathbb{R})$ とする．空間上のある点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で $\psi(x_0) > 0$ で以下 2 つの条件のうちどちらかを満たしているとする．

$$\text{(i)}\ \varphi(x_0) \geq 0\ かつ\ \int_{-\infty}^{x_0} \psi(x)dx > -\varphi(x_0)$$

$$\text{(ii)}\ \varphi(x_0) < 0\ かつ\ \int_{x_0}^{\infty} \psi(x)dx > -3\varphi(x_0)$$

このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し,

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad ならば \quad T^* \leq C'\varepsilon^{-(p-1)}$$

が成り立つ．ただし, $C' > 0$ は ε に無関係な正定数である．さらに次が成り立つ．

$$\limsup_{t\to T^*} (\|u_t(t)\|_{L^\infty} + \|u_x(t)\|_{L^\infty}) = \infty$$

参考文献

[1] Y. Haruyama and H. Takamura, Blow-up of classical solutions of quasilinear wave equations in one space dimension, Nonlinear Anal. Real World Appl. 81 (2025), 104212.

[2] P. D. Lax, Development of Singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Math. Phys. 5 (1964).

* 本講演は杉山裕介氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく．