

Stability of radial stationary solutions to a chemotaxis system with supercritical flux-dependent sensitivity

小波津 晶平 (東京理科大学)

e-mail: sho.kht.jp@gmail.com

1 序

次の流束依存型走化性方程式系について考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\frac{u}{|\nabla v|^\alpha} \nabla v \right) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ 0 = \Delta v + u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

ここで $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, u_0 は非負値の球対称関数とする. 問題 (1) はある化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる細胞 (密度 u) の運動を記述したモデルであり, 移流項の $|\nabla v|$ のべき乗を含む係数関数は細胞の走化性運動の強さを表している.

問題 (1) で $\alpha = 0$ としたときには, u_0 に対する適切な仮定のもとで, 解の性質について以下が成り立つことが知られている:

(A) $n = 2$ のとき, 次の質量臨界現象が起こる: $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < 8\pi$ のとき, 時間大域的古典解が一意的に存在して有界であり, $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} > 8\pi$ のときは対応する古典解が有限時刻で爆発する (cf. [6, 1, 5]).

また [2, 7] では, $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 8\pi$ のときに球対称定常解の安定性が示されている.

(B) $n \geq 3$ のとき, 任意の $m > 0$ に対して $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = m$ を満たす u_0 が存在し, 対応する球対称解が有限時刻で爆発する (cf. [6]).

一方, [8] では $n \geq 11$ の場合に球対称定常解の安定性が示されている.

また [4] では, (A) に対応する $\alpha = \alpha_c := \frac{n-2}{n-1}$ のとき, $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^{n-1} |S_{n-1}|$ ならば問題 (1) の球対称な時間大域的軟解[†]が一意的に存在して有界であり, $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} > \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^{n-1} |S_{n-1}|$ の場合には対応する球対称な軟解が有限時刻で爆発することを示した. ここで, $|S_{n-1}|$ は $n-1$ 次元単位球面の表面積を表す. さらに, $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^{n-1} |S_{n-1}|$ のときには, (1) の球対称定常解の安定性に関する結果も得られた.

一方, (B) に対応する $\alpha < \alpha_c$ の場合には, 有界領域 Ω 上の関連する方程式系において, $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ の大きさに関わらず有限時刻で爆発する球対称解の存在が示されている ([9]). しかし, 問題 (1) の球対称定常解の安定性については, まだ知られていない.

本研究の目的は, $\alpha = 0$ のときの問題 (1) の球対称定常解の安定性に関する [8] の結果を, $\alpha < \alpha_c$ の場合に拡張することである.

本講演は仙葉 隆氏 (神奈川大学) との共同研究に基づく.

[†](1) を積分方程式の意味で満たし, $v = (-\Delta)^{-1}u$ と表されるような連続関数の組 (u, v) のことを指す.

2 主結果

以下, $\lambda > 0$ に対して, (u_λ, v_λ) を問題 (1) の球対称定常解で $u_\lambda(0) = \lambda^\beta$ を満たすものとする. ただし $\beta := \frac{2-\alpha}{1-\alpha}$ である. 問題 (1) の球対称定常解の安定性について, 次の結果を得た.

主結果. $n \geq 2$, $\alpha < \alpha_c = \frac{n-2}{n-1}$ とし, 次が成り立つとする:

(i) $\alpha \leq \frac{1}{2}$ のとき, $n - \beta > 4(2 - \alpha)$.

(ii) $\alpha \in (\frac{1}{2}, \alpha_c)$ のとき, $n - \beta > \frac{\beta}{\alpha}$.

(iii) さらに $\alpha \in (0, \alpha_c)$ のとき, ある $\gamma < \frac{n}{2}$ が存在して

$$\frac{3}{2n} > \frac{\alpha}{n - \gamma} \quad \text{かつ} \quad \gamma > \beta + (1 - \alpha) \frac{n^\alpha (n - \beta)^{1-\alpha}}{n - \gamma} \beta.$$

このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対して, \mathbb{R}^n 上の関数 p_λ, q_λ が存在して, 以下が成り立つ: u_0 が非負値の球対称関数で, $p_\lambda(x) < u_0(x) < q_\lambda(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$) かつ

$$u_0 \in C_{\text{loc}}^\theta(\mathbb{R}^n) \quad (\theta \in (0, 1)), \quad u_0(0) > 0, \quad \|(1 + |\cdot|)^\beta u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

を満たすならば, 問題 (1) の時間大域的軟解 (u, v) が一意的に存在し,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

が成り立つ.

証明の方針. まず, 球対称定常解の族 $\{(u_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda > 0}$ が層構造をもつことを示す. $\alpha \neq 0$ の場合は一般に $u_\lambda \neq \lambda e^{v_\lambda}$ であるため, [8] のように Liouville 方程式 $\Delta v_\lambda + \lambda e^{v_\lambda} = 0$ には帰着できない. そこで, (1) の定常問題を常微分方程式系に変換し, その線形化問題を解析する.

次に, この層構造の性質を利用して問題 (1) の定常問題の劣解 p_λ , 優解 q_λ を適切に構成する. 証明のアイデアは藤田型方程式における [3] の方法に基づく.

参考文献

- [1] P. Biler. Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles. III. *Colloq. Math.*, 68(2):229–239, 1995.
- [2] P. Biler, G. Karch, P. Laurençot, and T. Nadzieja. The 8π -problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane. *Math. Methods Appl. Sci.*, 29(13):1563–1583, 2006.
- [3] C. Gui, W. Ni, and X. Wang. On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equation in \mathbf{R}^n . *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(9):1153–1181, 1992.
- [4] S. Kohatsu and T. Senba. Critical mass and stability of radial steady states for a flux-limited Keller–Segel system in the critical case. *Nonlinearity*, 38(9):Paper No. 095006, 30 pp., 2025.
- [5] M. Kurokiba and T. Ogawa. Finite time blow-up of the solution for a nonlinear parabolic equation of drift-diffusion type. *Differential Integral Equations*, 16(4):427–452, 2003.
- [6] T. Nagai. Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 5(2):581–601, 1995.
- [7] Y. Naito and T. Senba. Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic–elliptic system in two dimensional space. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12(5):1861–1880, 2013.
- [8] T. Senba. Stability of stationary solutions and existence of oscillating solutions to a chemotaxis system in high dimensional spaces. *Funkcial. Ekvac.*, 56(3):339–378, 2013.
- [9] M. Winkler. A critical blow-up exponent for flux limitation in a Keller–Segel system. *Indiana Univ. Math. J.*, 71(4):1437–1465, 2022.