Young's inequality for Banach function spaces and its applications

野ヶ山　徹*（東京理科大学）

本講演では，畳み込み積 $f * g$ に対する Young の不等式

$$\|f * g\|_X \lesssim \|f\|_X \|g\|_{L^1}$$

について考察する．まず，一般的な関数空間の枠組みを定義する．

Definition 0.1. Banach 空間 $E \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ が ball Banach 関数空間であるとは，以下の条件をすべて満たしているものとして定義する．

1. (Lattice property) 任意の $f \in E$ と $g \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対し $|f| \leq |g|$ ならば $\|f\|_E \leq \|g\|_E$.
2. (Fatou property) X の点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $0 \leq f_n \uparrow f$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_E < \infty$ を満たすならば $f \in E$ であり， $\|f\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_E$.
3. 任意の $\mathbb{R}^n$ の球 B に対し $\chi_B \in E$.
4. 任意の $\mathbb{R}^n$ の球 B と $f \in E$ に対し $\int_B |f| \leq C\|f\|_E$. ここで，C は f によらない定数である．

条件 3 と 4 において，球を有限測度を持つ可測集合に置き換えたものは Banach 関数空間とよばれている．これらについては [1, 2] などを参照せよ．

以下が今回の主定理である．

Theorem 0.2. *X を ball Banach 関数空間であるとする．このとき，次が成り立つ．*

(1) 任意の $f \in X$ と $z \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|f(\cdot - z)\|_X \lesssim \|f\|_X \tag{1}$$

が成り立っているならば，任意の $f \in X$ と $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し，*Young* の不等式

$$\|f * g\|_X \lesssim \|f\|_X \|g\|_{L^1}$$

が成り立つ．

*toru.nogayama@gmail.com, 東京都新宿区神楽坂 1-3　東京理科大学 理学部第二部数学科
本研究は科研費 (課題番号:24K22839) の助成を受けたものである

(2) $f \in X$ とする．任意の $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対し $\|f * g\|_X \lesssim \|f\|_X \|g\|_{L^1}$ が成り立っているならば，任意の $z \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|f(\cdot - z)\|_X \lesssim \|f\|_X$$

が成り立つ．

応用として，ball Banach 関数空間に付随した Besov 空間における熱方程式に対する最大正則性評価を一般的な形で得ることができる．

中心が原点であり，半径 $r > 0$ の n 次元開球を $B(r)$ で表す．$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を

$$\chi_{B(4)\setminus B(2)} \le \varphi \le \chi_{B(8)\setminus B(1)}$$

を満たすものとする．$j \in \mathbb{Z}$ に対し，$\varphi_j \equiv \varphi(2^{-j}\cdot)$ と定め，$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を多項式全体の集合とする．

Definition 0.3 (X に付随した斉次 Besov 空間)**.** X を ball Banach 関数空間とする．$s \in \mathbb{R}$, $1 \le r \le \infty$ とする．$\dot{B}^s_{X,r}(\mathbb{R}^n)$ を次のノルムが有限となる $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合と定義する．

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{X,r}} \equiv \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{js} \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\varphi_j \mathcal{F} f\right] \right\|_X \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

ここで，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ での Fourier 変換，Fourier 逆変換を表す．

Theorem 0.4. *X を (1) を満たす ball Banach 関数空間とする．$1 < \rho < \infty$，$1 \le w \le \infty$，$1 \le \sigma \le \infty$ とし，$u_0 \in \dot{B}^{2-2/\rho}_{X,w}(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，*

$$\|\partial_t u\|_{L^{\rho,w}([0,\infty);\dot{B}^0_{X,\sigma})} + \|\Delta u\|_{L^{\rho,w}([0,\infty);\dot{B}^0_{X,\sigma})} \lesssim \|u_0\|_{\dot{B}^{2-2/\rho}_{X,w}} + \|f\|_{L^{\rho,w}([0,\infty);\dot{B}^0_{X,\sigma})}$$

が成り立つ．

References

[1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators, Pure and Applied Mathematics, Vol 129, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[2] E. Lorist and Z. Nieraeth, *Banach function spaces done right*, Indag. Math. (N.S.) **35** (2024), no. 2, 247–268.

[3] T. Nogayama, *Young's inequality for Banch function spaces and its application to the maximal regularity estimate*, preprint, arXiv:2509.05252.