

対称関数に対する HYPERCONTRACTIVITY の改良

辻 寛 (東京科学大学)

ABSTRACT

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して, $u_s = P_s f$ を次の熱方程式の解とする:

$$\begin{cases} \partial_s u_s = \Delta u_s - \langle \nabla u_s, x \rangle \\ u_0 f = f \end{cases}.$$

このとき $(P_s f)_{s \geq 0}$ は Ornstein–Uhlenbeck 半群と呼ばれる. Ornstein–Uhlenbeck 半群は次の hypercontractivity を満たす.

Theorem 0.1 ([1]). $s > 0, p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は $\frac{q-1}{p-1} \leq e^{2s}$ をみたすとし, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ は非負関数とする. このとき

(1) $1 < p < q$ のとき,

$$\|P_s f\|_{L^q(\gamma)} \leq \|f\|_{L^p(\gamma)}.$$

(2) $-\infty < q < p < 1$ のとき,

$$\|P_s f\|_{L^q(\gamma)} \geq \|f\|_{L^p(\gamma)}.$$

ここで $\gamma = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$ は標準正規分布を表す.

本講演で紹介する結果は, 次の (2) の hypercontractivity の改良である.

Theorem 0.2 ([2]). $s > 0, -q < q < 0 < p < 1$ は $q < 1 - e^{2s}, 1 - e^{-2s} < p$ を満たすとし, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ は非負対称関数とする. このとき

$$\|P_s f\|_{L^q(\gamma)} \geq \|f\|_{L^p(\gamma)}.$$

主結果を満たす (p, q) は

$$\frac{q-1}{p-1} \leq e^{4s}$$

を満たす範囲を動くため, 既存の hypercontractivity の改良になっていることがわかる. 本講演では, 主結果の意味や面白さなどを紹介できればと思う. 本講演は中村昌平氏 (University of Birmingham) との共同研究に基づく.

REFERENCES

- [1] E. Nelson, The free Markov field, J. Funct. Anal. **12** (1973), 211–227.
- [2] S. Nakamura, H. Tsuji, The functional volume product under heat flow, J. Eur. Math. Soc., (2025), DOI 10.4171/JEMS/1720.