Blow-up rate for the subcritical semilinear heat equation in non-convex domains

Erbol Zhanpeisov (東北大学)*

1 導入

次の半線形熱方程式を考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $p>1$, $T>0$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $n \geq 1$ とし, Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の領域とする. 方程式 (1) には有限時間で爆発する解が存在し, 対応する常微分方程式 $v_t = |v|^{p-1}v$ と同じ爆発レート

$$\sup_{0<t<T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$$

をみたす場合をタイプ I, そうでない場合をタイプ II と呼ぶ. ソボレフ劣臨界範囲

$$1 < p < p_S := \begin{cases} \dfrac{n+2}{n-2} & \text{for } n \geq 3, \\ \infty & \text{for } n = 1,2 \end{cases}$$

では, Giga–Kohn [1] により, (非) 有界な凸領域上で, 正値解の場合, または $p < (3n+8)/(3n-4)(< p_S)$ の場合に, 爆発はタイプ I であることが示された. その後, ソボレフ劣臨界におけるタイプ I 評価は, 一般領域上の正値解 [6] および凸領域上の符号変化解 [3, 4] について確立されている. 一方, ソボレフ臨界指数では $3 \leq n \leq 6$ のときタイプ II 爆発解が存在することが知られており, 指数範囲の改善はできない. したがって残された問題は, 非凸領域上の符号変化解に対してタイプ I 評価が成立するかどうかであった. 本研究 [8] では, この場合に関して新たな結果を得た.

2 主定理

定理 1 $n \geq 1$, $1 < p < p_S$ とし, Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の $C^{2+\alpha}$ 領域 $(0 < \alpha < 1)$ とする. $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ に対する (1) の古典解 u が有限時間 $T>0$ で爆発するならば, その爆発はタイプ I である.

---

* 〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3
e-mail: `zhanpeisov.erbol.d6@tohoku.ac.jp`
本研究は JSPS 科研費 22KK0035, 23K13005, 23K12998, 23K20803, 23K22402, 25KJ0013 の助成を受けたものである.
2020 Mathematics Subject Classification: Primary 35K58; Secondary 35B44, 35B33
キーワード：Semilinear heat equation, blow-up rate, non-convex domain

タイプ I 評価は, 爆発プロファイルや爆発集合の精密解析の基盤として多くの研究で用いられている. 本研究の直接的応用として, スケーリング $u(x,t) \mapsto \lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x, \lambda^2 t)$ $(\lambda > 0)$ に不変な臨界ノルム L^{q_c} $(q_c := n(p-1)/2)$ の挙動を考察する. $3 \le n \le 5$, $p = p_S$ の場合に構成されたタイプ II 爆発解は臨界ノルムが有界であるため, 「$p \neq p_S$ に対して臨界ノルムが有界な爆発解が存在するか」という問題が以前から知られていた. Mizoguchi–Souplet [5] により任意の $p > 1$ に対してタイプ I 爆発が臨界ノルム爆発を導くことが知られており, さらに Miura-Takahashi [7] により $p > p_S$ の場合には一般領域上で臨界ノルムの非有界性が示された. これに対し $p < p_S$ かつ非凸領域・符号変化解の場合は未解明であったが, 本研究の主定理と [5] を組み合わせることで, この場合にも臨界ノルム爆発が生じることを確認した.

系 2　定理 1の仮定のもとで以下が成り立つ:

$$\lim_{t \to T} \|u(\cdot,t)\|_{L^{q_c}(\Omega)} = \infty.$$

証明は Giga–Kohn 型の重み付きエネルギーの解析による. 主な困難点は (i) 領域が非凸であるため従来のエネルギー単調性が破れること, (ii) 符号変化解を扱うため従来の Liouville 型定理が適用できないことである.

本研究では Blatt–Struwe [2] に着想を得て, ある境界積分量を導入し, 非凸領域でもエネルギーが一様に有界となる擬単調性公式を導く. 次に Giga-Matsui-Sasayama 型の bootstrap argument を展開し, 補間定理と最大正則性定理を組み合わせることで, すべての $p > 1$, 任意の $q < p+1$ に対して相似変換後の解に $L^\infty_t L^q_x$ 評価を得る. 最後に線形放物型方程式の内部正則性定理を適用し, $p < p_S$ の仮定のもとタイプ I 爆発評価を導く.

参考文献

[1] Y. Giga and R. V. Kohn, *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), no. 1, 1–40.

[2] S. Blatt and M. Struwe, *Boundary regularity for the supercritical Lane-Emden heat flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations 54 (2015), no. 2, 2269–2284.

[3] Y. Giga, S. Matsui, and S. Sasayama, *Blow up rate for semilinear heat equations with subcritical nonlinearity*, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), no. 2, 483–514.

[4] Y. Giga, S. Matsui, and S. Sasayama, *On blow-up rate for sign-changing solutions in a convex domain*, Math. Methods Appl. Sci. 27 (2004), no. 15, 1771–1782.

[5] N. Mizoguchi and Ph. Souplet, *Optimal condition for blow-up of the critical L^q norm for the semilinear heat equation*, Adv. Math. 355 (2019), 106763, 24 pp.

[6] P. Quittner, *Optimal Liouville theorems for superlinear parabolic problems*, Duke Math. J. 170 (2021), no. 6, 1113–1136.

[7] H. Miura and J. Takahashi, *Blow-up of the critical norm for a supercritical semilinear heat equation*, J. Eur. Math. Soc. (2024), published online first.

[8] H. Miura, J. Takahashi, and E. Zhanpeisov, *Blow-up rate for the subcritical semilinear heat equation in non-convex domains*, arXiv:2510.17229, 2025.