

有限体積法による水分移動モデルの可解性の解析

愛木豊彦・日本女子大学理学部

本講演の内容は、森村晃子氏との共同研究の成果 [3, 4] に基づいている。ここでは, [2] で提案された 2 相流 (two-phase flow) を単純化して得られた以下の初期値境界値問題を扱う。

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(u) - \partial_x (\partial_x u + \lambda(u) \partial_x p_a) &= 0 \text{ in } Q(T), \\ \partial_x u + \lambda(u) \partial_x p_a &= 0 \text{ at } x = 0, 1, 0 < t < T, \\ u(0, x) &= u_0(x) \text{ for } 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, $Q(T) = (0, T) \times (0, 1)$, $T > 0$, φ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数 (図 1 参照), λ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数, p_a は $Q(T)$ 上の既知関数, u_0 は初期関数である。

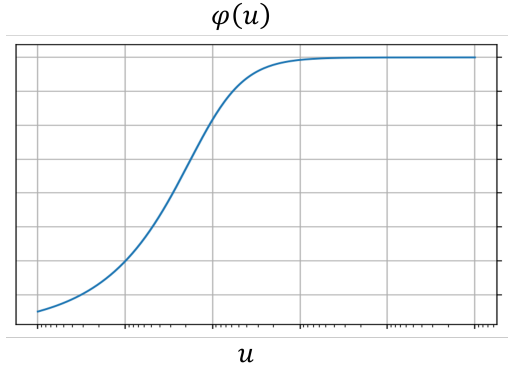


図 1 φ の代表例

この問題の特徴は次の 2 点である。

- (a) 方程式 (1) が楕円-放物型である。
- (b) 境界条件が非単調である。

(a) は φ に次の (A1) を仮定することで回避している。

(A1): $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $0 < c_\varphi \leq \varphi' \leq C_\varphi$ on $\mathbb{R}$, φ'' は $\mathbb{R}$ 上, 有界である。

上記仮定により, (1) は楕円-放物型方程式ではないが, 低階の微分項を含む準線形方程式である。

また, 境界条件に現れる p_a は元は未知関数であり, 境界上での傾きに符号を仮定することは適切ではない。そのため境界条件は非単調となり, この発展方程式理論と不動点定理を組み合わせるという標準的な方法を応用できない。そこで, 本研究では, 有限体積法によって近似解を構成することにより, 強解の存在を示すことができた。また合わせて, 近似解の誤差評価も得られた。

定理. (A1) と $\lambda \in C^2(\mathbb{R})$ を仮定する。

(1) $p_a \in L^4(0, T; H^1(0, 1))$, $u_0 \in L^2(0, 1)$ ならば, 問題の弱解は一意に定まる。

(2) $\partial_x p_a \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(Q(T)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$, $u_0 \in H^1(0, 1)$ ならば, 強解が存在し, 有限体積法によって構成された近似解 u_n に対し, 次が成り立つ。

$$|u_n(t) - u(t)|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\frac{1}{n} \right)^{1/4} \quad \text{for } n.$$

弱解の存在は, Roubíček [1] で証明されている。本講演では, 非線形偏微分方程式の理論解析に対する有限体積法の役割を中心に, 上記問題に対する成果を述べる。

参考文献

- [1] T. Roubíček, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Series of Numerical Mathematics, Vol. 153, Birkhäuser Basel, 2005.
- [2] D. W. Green, H. Dabiri, C. F. Weinaug, R. Prill, Numerical modeling of unsaturated groundwater flow and comparison of the model to a field experiment, *Water Resources Research*, 6(1970), 862-874.
- [3] A. Morimura, T. Aiki, Convergence of approximate solutions constructed by the finite volume method for the moisture transport model in porous media. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 35 (2026), 243-298.
- [4] A. Morimura, T. Aiki, An initial-boundary value problem describing moisture transport in porous media: existence of strong solutions and an error estimate for a finite volume scheme. *Evol. Equ. Control Theory*, 21 (2026), 112-130.