

動く薄膜領域上の p -ラプラス拡散方程式に対する厚さゼロ極限

三浦達彦 (Tatsu-Hiko MIURA)*¹

東京都立大学大学院理学研究科

1 導入

$n \geq 2$, $T \in (0, \infty)$ とする. $t \in [0, T]$ に対して, Γ_t を $\mathbb{R}^n$ 内の与えられた動く閉超曲面とする. また, $\boldsymbol{\nu}$ を Γ_t の外向き単位法線ベクトル, V_Γ を Γ_t の外向き法線方向速度 (スカラー値) とする.

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 内の動く薄膜領域を $\Omega_t^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \Gamma_t) < \varepsilon/2\}$ で定める. このとき, $p > 2$ を定数として, 次の p -ラプラス拡散方程式を考える:

$$(pD)_\varepsilon \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon = \text{div}(|\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \nabla u^\varepsilon) & \text{in } Q_T^\varepsilon := \bigcup_{t \in (0, T)} \Omega_t^\varepsilon \times \{t\}, \\ (|\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \nabla u^\varepsilon + u^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\nu}^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial_\ell Q_T^\varepsilon := \bigcup_{t \in (0, T)} \partial \Omega_t^\varepsilon \times \{t\}, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon & \text{in } \Omega_0^\varepsilon. \end{cases}$$

ただし, $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$ は $\partial \Omega_t^\varepsilon$ の外向き単位法線ベクトルである. また, $x \in \overline{\Omega_t^\varepsilon}$ に対して

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x, t) := [V_\Gamma \boldsymbol{\nu}](y, t), \quad y \in \Gamma_t \text{ は } x \text{ から } \Gamma_t \text{ に下ろした垂線の足}$$

と定め, $\mathbf{v}^\varepsilon$ を $\overline{\Omega_t^\varepsilon}$ の速度と考える. 境界条件は総質量保存則 $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varepsilon} u^\varepsilon dx = 0$ に対応するノイマン型の境界条件 (あるいはロバン境界条件) である.

先行研究 [7] では, Alphonse et al. [1] により導入された evolving Bochner space の理論に基づいて (一般の動く領域における) 初期値境界値問題 $(pD)_\varepsilon$ の弱解を定義し, その存在と一意性を証明した. 本講演の目的は, $(pD)_\varepsilon$ の弱解 u^ε の極限を調べ, 適当な意味で極限関数が存在することを示してその極限関数が満たす偏微分方程式を導出することである. このような厚さゼロ極限の問題については, 薄膜領域が静止している場合には数多くの研究があるが, 動く薄膜領域を扱った研究はそれほど多くない [2, 3, 4, 5, 6, 9]. 特に, $\varepsilon \rightarrow 0$ での極限集合が動く曲面である場合に, 非線形偏微分方程式の厚さゼロ極限について数学的に厳密な解析を行った研究はない.

2 記号

主定理を述べるために必要な記号を準備する. $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, 動く薄膜領域が

$$\Omega_t^\varepsilon = \{y + r\boldsymbol{\nu}(y, t) \mid y \in \Gamma_t, |r| < \varepsilon/2\} \quad (\text{曲面上の点と法線方向への距離による表現})$$

と書けることを用いて, Ω_t^ε 上の関数 φ に対して膜の厚さ方向への重み付き積分平均を

$$\mathcal{M}_\varepsilon \varphi(y) := \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(y + r\boldsymbol{\nu}(y, t)) J(y, t, r) dr, \quad y \in \Gamma_t$$

で定める. ただし, $J(y, t, r) = 1 + O(\varepsilon)$ は次の変数変換に現れるヤコビアンである:

$$\int_{\Omega_t^\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\Gamma_t} \left(\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(y + r\boldsymbol{\nu}(y, t)) J(y, t, r) dr \right) d\sigma(y) \quad (d\sigma \text{ は面積要素}).$$

*¹ e-mail: th_miura@tmu.ac.jp

また, Γ_t 上の微分作用素として, ∇_Γ を接勾配, $\operatorname{div}_\Gamma$ を表面発散, $\partial_\Gamma^\bullet = \partial_t + (V_\Gamma \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla$ を速度ベクトル $V_\Gamma \boldsymbol{\nu}$ に沿った時間微分 (物質微分) とする. さらに, $H := -\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\nu}$ を Γ_t の平均曲率とする.

3 主定理

$S_T := \bigcup_{t \in (0, T)} \Gamma_t \times \{t\}$ とする. 本講演の主定理は次の通りである.

定理 1 ([8, Theorem 1.1]). 問題 $(pD)_\varepsilon$ について, 初期値 $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega_0^\varepsilon)$ が条件

- ある $c > 0$ が存在して, 十分小さい全ての $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon^{-1/2} \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)} \leq c$,
- ある $v_0 \in L^2(\Gamma_0)$ が存在して, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $\mathcal{M}_\varepsilon u_0^\varepsilon \rightarrow v_0$ weakly in $L^2(\Gamma_0)$

を満たすと仮定する. このとき, u^ε を $(pD)_\varepsilon$ の弱解とすると, ある S_T 上の関数 v, ζ が存在して

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon &= v \quad \text{weakly in } L^p(0, T; W^{1,p}(\Gamma_{(\cdot)})), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\nu} &= \zeta \quad \text{weakly in } L^p(S_T) = L^p(0, T; L^p(\Gamma_{(\cdot)})) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, (v, ζ) は次の極限問題の唯一の弱解である:

$$(pD)_0 \quad \begin{cases} \partial_\Gamma^\bullet v - V_\Gamma H v = \operatorname{div}_\Gamma [(|\nabla_\Gamma v|^2 + \zeta^2)^{(p-2)/2} \nabla_\Gamma v] & \text{on } S_T, \\ (|\nabla_\Gamma v|^2 + \zeta^2)^{(p-2)/2} \zeta + V_\Gamma v = 0 & \text{on } S_T, \\ v|_{t=0} = v_0 & \text{on } \Gamma_0. \end{cases}$$

通常の p -ラプラス拡散方程式の解析と同様, 主定理の証明における最も困難な点は極限操作を行う際の非線形項 $|\nabla u^\varepsilon|^{p-2} \nabla u^\varepsilon$ の取扱いである. この困難は, 膜の厚さ方向への積分平均と単調作用素の議論を適切に組み合わせて議論することで解決される. 本講演では主定理の証明の概略を示した後, 非線形項の扱いに関する部分について解説を行う予定である.

元の問題 $(pD)_\varepsilon$ は単独の方程式であったが, 極限問題 $(pD)_0$ は非線形偏微分方程式と代数方程式の連立方程式になっている. これは少々奇妙にも見えるが, 実は極限問題は動く曲面 Γ_t 上の局所的な質量保存則と見なすことができる. したがって, 質量保存則の対応の観点から, 主定理は自然な結果を与えていると考えられる. 本講演ではこのことについても解説を行う.

参考文献

- [1] A. Alphonse, D. Caetano, A. Djurdjevac, and C. M. Elliott, J. Differential Equations **353** (2023), 268–338.
- [2] C. M. Elliott and B. Stinner, Math. Models Methods Appl. Sci. **19** (2009), 787–802.
- [3] T.-H. Miura, Interfaces Free Bound. **19** (2017), 31–77.
- [4] T.-H. Miura, Quart. Appl. Math. **76** (2018), 215–251.
- [5] T.-H. Miura, Y. Giga, and C. Liu, Adv. Math. Sci. Appl. **27** (2018), 115–141.
- [6] T.-H. Miura, Interfaces Free Bound. **25** (2023), 633–670.
- [7] T.-H. Miura, Nonlinear Anal. **269** (2026), Article 114099.
- [8] T.-H. Miura, preprint, arXiv:2601.09386.
- [9] J. V. Pereira and R. P. Silva, Bound. Value Probl. (2013), 2013:248.