

有界領域上における非圧縮性オイラー方程式の弱解 のエネルギー保存条件について

青木 基記 (東京理科大学 創域理工学部 数理科学科)*

本講演では, 次の領域上における非圧縮性オイラー方程式について考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u \cdot n = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{E})$$

ここで, 領域 Ω は 3 次元空間の単連結で境界が滑らかな有界領域とする. また, $u = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$, $p = p(t, x)$ はそれぞれ流体の速度場と圧力を表す未知関数である. さらに, n は外向き単位法線ベクトルである. また, $u_0(x) = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), u_{0,3}(x))$ は与えられた初期速度場とする.

はじめに, 非圧縮性オイラー方程式の弱解の定義を述べる.

定義 (弱解). $s > 0$, $1 < p < \infty$ とする. ホッジラプラシアンと射影作用素によって定まるストークス作用素を A_H とする ([6] を参照). $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$, $L_\sigma^p(\Omega)$, $H_\sigma^{s,p}(A_H)$ をそれぞれ

$$C_{c,\sigma}^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega)^3 \mid \operatorname{supp} u \subset \Omega : \text{compact}, \operatorname{div} u = 0\},$$

$$L_\sigma^p(\Omega) := \overline{C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p}}, \quad H_\sigma^{s,p}(A_H) := \left\{u \in L_\sigma^p(\Omega) \mid A_H^{\frac{s}{2}} u \in L_\sigma^p(\Omega)\right\}$$

で定める.

時刻 T を正とする. $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ に対し, 次の条件が成り立つとき, u は非圧縮性オイラー方程式の時間区間 $(0, T)$ 上の弱解であるという:

(1) $u \in L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$, $p \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ に属し, $u(t)$ は L^2 の弱位相の意味で時間区間 $[0, T]$ 上連続である.

(2) 任意の $0 \leq t < T$ と $\phi \in W^{1,1}(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; H_\sigma^{\frac{3}{2},6}(A_H))$ に対し,

$$\int_0^t \langle u, \partial_t \phi \rangle d\tau + \int_0^t \langle u \otimes u, \nabla \phi \rangle d\tau = \langle u(t), \phi(t) \rangle - \langle u_0, \phi(0) \rangle$$

が成り立つ. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 内積を表す.

Onsager は, オイラー方程式の弱解がエネルギーを保存するための可微分性の閾値が $1/3$ であるという予想をした. 本研究では, 弱解がエネルギーを保存するための十分条件を考える.

Constantin–E–Titi [3] は, $1/3$ より大きい可微分指数 α に対して, $L^3(0, T; B_{3,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^3))$ に弱解が属しているとき, エネルギーが保存されることを示した. 2008 年には, 可微分指数が $1/3$ の場合についても弱解がエネルギーを保存するための十分条件が Cheskidov–Constantin–Friedlander–Shvydkoy [2] によって明らかにされている. 一方で, Isett [5] は, $1/3$ より低い正則性のときに, エネルギーが特異散逸する弱解が存在することを明らかにした. Bardos–Titi [1] は, [3] に対応する結果を有界領域上で導いている. また, Drivas–Nguyen [4] は, 可微分指数を $1/3$ とし, 境界付近で解にある種の有界性を課し

* 〒 270-8510 千葉県野田市山崎 2641
e-mail: aoki_motofumi@rs.tus.ac.jp

た場合を考察している. 本研究では, [2] に対応する条件のもとで, 領域上においてエネルギー等式が成り立つことを示す.

A_H に付随する Besov 空間を以下で定める.

定義 (領域上の Besov 空間). Ω を有界領域とし, 非負値関数 $\phi_{-1}, \phi_0, \phi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_{-1} &: \text{compact}, \quad \text{supp } \phi_0 \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid 2^{-1} \leq \lambda \leq 2\}, \quad \phi_j(\lambda) := \phi_0(2^{-j}\lambda), \\ \phi_{-1}(\lambda) &= 1, \quad \text{for } \lambda \in [-\lambda_0^2, 0], \quad \phi_{-1}(\lambda) + \sum_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \phi_j(\lambda) = 1, \quad \text{for } \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

を満たすようにとる. A_H に対し, 線形位相空間 $\mathcal{X}$ とセミノルム族 $\{P_M\}_{M \in \mathbb{N}}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \{f \in L^1 \cap \mathcal{D}(A_H) \mid (A_H)^M f \in L^1 \cap \mathcal{D}(A_H) \text{ for all } M \in \mathbb{N}\}, \\ P_M(f) &:= \|f\|_{L^1} + \sup_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} 2^{Mj} \|\phi_j(\sqrt{A_H})f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

と定める. $\mathcal{X}'$ を $\mathcal{X}$ の双対空間とする. このとき, $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$ に対し, Besov 空間 $B_{p,q}^s(A_H)$ を

$$\begin{aligned} B_{p,q}^s(A_H) &:= \{f \in \mathcal{X}' \mid \|f\|_{B_{p,q}^s(A_H)} < \infty\}, \\ \|f\|_{B_{p,q}^s(A_H)} &:= \|\phi_{-1}(\sqrt{A_H})f\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \left\{ 2^{sj} \|\phi_j(\sqrt{A_H})f\|_{L^p(\Omega)} \right\}_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \right\|_{\ell^q}. \end{aligned}$$

で定める.

定理. u を $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ を初期値とする非圧縮性オイラー方程式の弱解とする. 弱解 u が

$$u \in L^3\left(0, T; B_{3,\infty}^{\frac{1}{3}}(A_H)\right)$$

かつ

$$2^{\frac{j}{3}} \|\phi_j(\sqrt{A_H})u\|_{L^3(0,T;L^3)} \longrightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty$$

を満たしているとき, u はエネルギーを保存する. すなわち,

$$\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2$$

が任意の $0 \leq t \leq T$ に対して成り立つ.

注意.

- (1) 本結果は, 全空間上における [2] に対応する条件のもとで, 有界領域上の弱解がエネルギーを保存することを明らかにしたものである.
- (2) 本研究では, A_H のレゾルベントを作用させることで近似列を構成している. 特に, この近似列は滑り境界条件を保っている.

References

- [1] C. Bardos and E. S. Titi, Arch. Ration. Mech. Anal. **228** (2018), no. 1, 197–207.
- [2] A. Cheskidov, P. Constantin, S. Friedlander, and R. Shvydkoy, Nonlinearity **21** (2008), no. 6, 1233–1252.
- [3] P. Constantin, W. E, and E. S. Titi, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 1, 207–209.
- [4] T. D. Drivas and H. Q. Nguyen, SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), no. 5, 4785–4811.
- [5] P. Isett, Ann. of Math. (2) **188** (2018), no. 3, 871–963.
- [6] T. Miyakawa, Hiroshima Math. J. **10** (1980), no. 3, 517–537.