Barles-Perthame 極限に基づく平均曲率流方程式の時間周期障害物問題の時間周期解の構成について

大塚 岳 (東京理科大学)

平均曲率流方程式に代表される幾何学的発展方程式に対する障害物問題

$$\min\{\max\{u_t + F(t,x,Du,D^2u), u-\phi\}, u-\psi\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{T}^n. \tag{1}$$

を考える. ただし $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ であり, F は基本的には平均曲率流方程式

$$F(t,x,p,X) = -\mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right\},$$

一般には周期性 $F(t+T,x,p,X) = F(t,x,p,X)$ をみたす $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{S}^n$ 上の連続, 退化放物型な幾何学的発展方程式である. 関数 ψ,ϕ は解の値域を制限する障害物を表す関数で, 次をみたすとする.

(A1) $\psi,\phi\in C^{1,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n)$.

(A2) $\psi(t,x)\le\phi(t,x)$ が任意の $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n$ に対して成り立つ.

(A3) ある $T>0$ が存在して, $\psi(t+T,x)=\psi(t,x)$, $\phi(t+T,x)=\phi(t,x)$ が任意の $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n$ に対して成り立つ.

(A4) 任意の $x\in\mathbb{T}^n$ に対して, $\psi(0,x)\le u_0(x)\le\phi(0,x)$ をみたす $u_0\in C^2(\mathbb{T}^n)$ が存在する.

初期値 $u(0,x)=u_0(x)\in C(\mathbb{T}^n)$ が

$$\psi(0,x)\le u_0(x)\le\phi(0,x) \quad \text{for } x\in\mathbb{T}^n$$

をみたすとき, (1) には一意な時間大域的な粘性解が存在し,

$$\psi(t,x)\le u(t,x)\le\phi(t,x) \quad \text{for } (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{T}^n$$

をみたすことが [4] により示されている. また, (A3) のような周期性のもとで (1) の数値計算実験を行うと, 解の等高線集合が同じく周期 T の周期的挙動に収束する様子が観測される. 本研究の目的は, その漸近挙動として収束先となりうる周期解を, (1) の時間大域的な解から構成する.

周期解の構成の基本的な方針として, [1] の極限操作による手順に従う. まず (1) の近似方程式

$$\min\{\max\{u^\varepsilon_t + \varepsilon u^\varepsilon + F(t,x,\nabla u^\varepsilon,\nabla^2u^\varepsilon), u^\varepsilon-\phi\}, u^\varepsilon-\psi\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{T}^n \tag{2}$$

を考える. すると (2) の周期粘性劣解および優解に対し, 次の比較定理が得られる.

定理 1 (A1)–(A3) を仮定する. u,v をそれぞれ $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n$ 上で (2) の粘性劣解および優解とし, これらはそれぞれ時間周期的であるとする. このとき, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n$ 上で $u^*\le v_*$ が成り立つ. とくに, (2) に対し高々 *1* つの周期粘性解が存在する.

以下, (A1)–(A4) を仮定する. このとき [2] の議論に従い, 次の大域解の存在定理を得る.

定理 2 ([3]) (A1)–(A4) を仮定する. このとき, u_0 を初期値とする (2) の粘性解 $u^\varepsilon \in C([0,\infty)\times\mathbb{T}^n)$ で,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \left(\|u^\varepsilon\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T}^n)}, \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T}^n)}, \|u_t^\varepsilon\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T}^n)}\right) < \infty \tag{3}$$

をみたすものがただ *1* つ存在する.

そこでいま,

$$\overline{u}^\varepsilon(t,x) = \lim_{k\to\infty}\sup_{j\ge k} u^\varepsilon(t+jT,x), \quad \underline{u}^\varepsilon(t,x) = \lim_{k\to\infty}\inf_{j\ge k} u^\varepsilon(t+jT,x)$$

と定める. すると粘性解の基本的な性質により $\overline{u}^\varepsilon$ は (2) の粘性劣解であり, $\underline{u}^\varepsilon$ は (2) の粘性優解であって, これらの定義により $\overline{u}^\varepsilon \ge \underline{u}^\varepsilon$ が従う. 他方定理 1 により $\overline{u}^\varepsilon \le \underline{u}^\varepsilon$ が得られ, したがって $\overline{u}^\varepsilon = \underline{u}^\varepsilon$ となる. すなわち, $\hat{u}^\varepsilon := \overline{u}^\varepsilon = \underline{u}^\varepsilon$ は (2) の周期粘性解となる. 加えて (3) から, $\hat{u}^\varepsilon$ は $\varepsilon > 0$ について一様有界であり, かつ一様な Lipschitz 定数で Lipschitz 連続となる. したがって Ascoli-Arzelà の定理から, $[0,T]\times\mathbb{T}^n$ 上で $\hat{u}^\varepsilon$ の一様収束部分列を得ることができる. $\hat{u}^\varepsilon$ の周期性からこの一様収束極限を $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n$ に拡張して, 粘性解の安定性から次の主結果を得る.

定理 3 ([3]) (A1)–(A4) を仮定する. このとき (1) の時間周期解 $u \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^n)$ で, ある定数 $L > 0$ に対し

$$|u(t,x) - u(s,y)| \le L(|t-s| + |x-y|) \quad \textit{for } (t,x),(s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}^n$$

をみたすものが存在する.

本講演は小池茂昭氏 (早稲田大学), 石井克幸氏 (神戸大学) との共同研究に基づく.

参考文献

[1] G. Barles, and B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, Math. Modeling Numer. Anal., **21**(4), (1987), 557-579.

[2] K. Ishii, H. Kamata, and S. Koike, Remarks on mean curvature flow with obstacles, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 215, eds. Y. Maekawa, S. Jimbo, (2017), 83–103.

[3] K. Ishii, S. Koike, and T. Ohtsuka, Time periodic solutions of mean curvature flow equation with bilateral obstacles, submitted.

[4] G. Mercier, Mean curvature flow with obstacles: a viscosity approach, arXiv:1409.7657, 2014.