Eigenvalue problem for second order singular linear ordinary differential equations

浅川 秀一　Hidekazu ASAKAWA　（岐阜大学工学部）
e-mail: asakawacc.gifu-u.ac.jp

平成 12 年 10 月 21 日

次のような線形の固有値問題を考えます．

$$\begin{aligned} &u''(t)+\lambda a(t)u(t)=0 \quad \text{a.e. } t\in(0,1),\\ &u(0)=u(1)=0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，λ は実パラメーターで，係数 a は $(0,1)$ 上の局所可積分関数であり，

$$a\in X_p\equiv\{\phi\in X_+\mid \int_0^1(1-t)t\phi(t)\,dt>0\}$$

とする．ただし，

$$\begin{aligned} X &\equiv \{\phi\mid \int_0^1 t(1-t)|\phi(t)|\,dt<+\infty\},\\ X_+ &\equiv \{\phi\in X\mid \phi(t)\geq 0 \text{ a.e. } t\in(0,1)\} \end{aligned}$$

である．より正確には，$u\in C[0,1]$ に対し，

$$L_a[u](t)=(1-t)\int_0^t sa(s)u(s)\,ds+t\int_t^1(1-s)a(s)u(s)\,ds,$$

で定義される線形作用素 $L_a:C[0,1]\to C[0,1]$ の特性値問題を考えます．係数関数 a は必ずしも $L^1(0,1)$ に属さなくてもよく，その意味で固有値問題 (1) は区間の両端 $t=0$ と $t=1$ に特異性の可能性を許している．

作用素 A に対し，その零空間を $N(A)$ で表すことにすると，$N(I-\lambda L_a)\neq\{0\}$ となるとき λ を線形作用素 L_a の特性値といい，次の結果が成り立つ ([1])．

定理 **1**　$a\in X$ とする．

(1) L_a は，$C[0,1]$ 上のコンパクト作用素である．

(2) $N(I-\lambda L_a)\neq\{0\}$ なら，$\dim N(I-\lambda L_a)=1$．

(3) $u\in N(I-\lambda L_a)\setminus\{0\}$ なら，$u\in C^1[0,1]$ であり，u の区間 $[0,1]$ 内の零点の個数は有限である．

さらに，$a \in X_p$ とする．

(４) L_a の特性値は，可算個で，

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots \to +\infty$$

と並べることができる．

(５) $u \in N(I - \lambda_n L_a) \setminus \{0\}$ は，区間 $[0,1]$ 内に丁度 $n+1$ 個の零点をもつ．

D. O'Regan [2] では，$a(t) > 0$ a.e. $t \in (0,1)$ の場合について，さらに a の境界 $t = 0, 1$ の近傍での挙動に関する条件を課して，L_a を重み付きの $\mathbf{L}^2$ 空間 $\mathbf{L}^2_a(0,1) \equiv \{\int_0^1 au^2\,dt < +\infty\}$ 上の作用素みなして，定理 1 の (1), (2), (4) が成り立つことが示されている．また，無限区間の場合をも含む特異性を許す，もっと一般の二階線形常微作用素の固有値問題についても，E. C. Titchmarsh [3], E. A. Coddington & N. Levinson [4], D. O'Regan [5] 等に $\mathbf{L}^2$ 枠の理論が詳しく知られている．

しかし，Nonresonant 問題等の半線形の境界値問題への応用 (例えば，Y. Zhang [6], I. T. Kiguradze [7] 等) を考えると，非線形項の形や特異性の影響で解が重み付きも含めた $\mathbf{L}^2$ 空間に属するとは限らず，固有値問題の $\mathbf{L}^2$ 理論だけでは必ずしも十分とは言い切れません．

今回の神楽坂セミナーでは，定理 1 の証明の概要を紹介させて頂きます．また，時間が許せば，Nonresonant 問題への応用や，Á. Elbert, T. Kusano, M. Naito [9], Y. Kabeya [8] 等に述べられている半無限区間上の線形固有値問題との関連についてもお話したいと思っています．

Referances

参考文献

[1] H. Asakawa, Nonresonant Singular Two-Point Boundary Value Problems, Nonlinear Analysis T.M.A. to appear.

[2] D. O'Regan, Singular Dilichlet boundary value problem I. Superlinear and nonresonant case, Nonlinear Analysis T.M.A. 29 (1997), 221–245.

[3] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions, Oxford, London, 1962.

[4] E. A. Coddington & N. Levinson, Theory of Ordinary Diffferential Equations, McGRAW Hill, New York, 1963.

[5] D. O'Regan, Theory of Singular Boundary Value Problems, World Scientific Press, Singapore, 1994.

[6] Y. Zhang, Positive solutions of singular sublinear Emden-Fowler boundary value problems, J. Math. Analysis Appl. 185 (1994), 215–222.

[7] I. T. Kiguradze, On a singular boundary value problem, J. Math. Analysis Appl. 30 (1970), 475–489.

[8] Y. Kabeya, Uniqueness of nodal fast-decaying radial solutions to a linear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 27 (1997), 391–405.

[9] Á. Elbert, T. Kusano, M. Naito, Singular eigenvalue problems for second order linear ordinary differential equations, Archivum Mathematicum (BRNO) 34 (1998), 59–72.