ANALYTIC SOLUTIONS TO SOME NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

加藤 圭一 (東京理科大・理)

次の空間 1 次元非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u &= f(u), \\ u(0,x) &= \phi(x), \end{cases} \tag{1}$$

を考える。本講演で考察する問題は、ϕ がどのような条件の下で、解 u が実解析的になるかという問題である。Hayashi-Saitoh[5] により、初期値 ϕ が $\|e^{a|x|}\phi\| < \infty$ を満たす時、解 u は、$t \neq 0$ で実解析的になることがわかっている。一方、Hayashi-Kato[3], Taniguchi-Kato[7] により、$\|(x\partial_x)^k \phi\| \leq CA^l l!$ が任意の自然数 l で満たされれば、(1) は $t \neq 0$ で時空間変数に関し実解析的になることが示されている。

本講演では、後者と同様のことを解析接続を用いて示すことを目標とする。主結果は以下の通りである。簡単のため、$f(u) = u^2$ とする。初期値 ϕ に次の条件を仮定する。

Assumption 1. 初期値 ϕ はその *Fourier* 変換 $\hat{\phi}$ がある正数 $A > 0$ が存在して $D = \{\xi + i\eta \in \mathbb{C} | |\eta| \leq A|\xi|\}$ で正則で、$|a| \leq A$ を満たす a に対し

$$\|\hat{\phi}(\xi - ia\xi)\|_{L^2_\xi} < \infty,$$

を満たす。

Theorem 1. 上記 *Assumption1* を仮定する。そのとき、ある $T > 0$ が存在して (1) の解 u が $C([0,T]; L^2)$ で一意的に存在し、u は空間変数に関し解析的となる。

この結果自身は新しいものではなく、Taniguchi-Kato[7] に含まれるが、ここでは、その結果の解析接続による別証明を紹介する。

証明は以下の 3 つのステップで行なう。

(ステップ 1)

(1) を解くことは、次の積分方程式を解くことに帰着される。

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{it\xi^2}\hat{\phi}(\xi) + i\int_0^t e^{i(t-s)\xi^2}\hat{u} * \hat{u}(s,\xi)ds. \tag{2}$$

Date: 1999 年 6 月 26 日.

もし、$\hat{u}(t,\xi)$ が D まで解析接続できると仮定すると形式的に方程式(2)は次のようになる。

(3)

$$\hat{u}(t,\xi-ia\xi)=e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi)+i(1-ia)\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\hat{u}*\hat{u}(s,\xi-ia\xi)ds.$$

$\tilde{u}_a(t,\xi)=\hat{u}(t,\xi-ia\xi)$ とおくと、積分方程式

(4)

$$\tilde{u}_a(t,\xi)=e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi)+i(1-ia)\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\tilde{u}_a*\tilde{u}_a(s,\xi)ds,$$

が得られる。$b>0$ とし、各 $0<a\leq A$ について関数空間

$$X_a=\{f(t,\xi)\in C([0,T],L^2)|\sup_t\|e^{bat|\xi|}f(t,\xi)\|_{L^2_\xi}<\infty\}$$

を用意しその上で積分方程式(4)を解く。

(ステップ 2)

$U(t,\xi-ia\xi)=\tilde{u}_a(t,\xi)$ と置き、$U(t,\zeta)$ が D で正則であることを示す。

(ステップ 3)

ステップ 2 から、Cauchy の積分定理を用いると

$$(5)\quad u(t,x)=(1-ia)/2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{it(\xi-ia\xi)^2}\hat{\phi}(\xi)e^{ix(\xi-ia\xi)}d\xi$$
$$+i(1-ia)^2/2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}\hat{u}*\hat{u}(s,\xi-ia\xi)e^{ix(\xi-ia\xi)}dsd\xi.$$

積分方程式(5)に表れる $e^{it(\xi-ia\xi)^2}$、$e^{i(t-s)(\xi-ia\xi)^2}$ の肩の部分が

$$(6)\qquad it(\xi-ia\xi)^2=it(\xi^2-a^2\xi^2)-2at\xi^2$$

であるから、$t>0$ のときは $a>0$ を、$t<0$ のときは $a<0$ を用いて、積分方程式(5)より $u(t,x)$ が $t\neq 0$ で $|x|<b$ のとき空間変数に関し解析的であることがわかる。ただし、bを大きくとると、存在時間が小さくなるので、すべての x で解析性を示すには、この議論をもう 1 度繰り返す必要がある。

References

[1] de Bouard, A., *Analytic solutions to non-elliptic nonlinear Schrödinger equations* , J. Diff. Equations, **104**, (1993) 196-213.

[2] de Bouard, A., Hayashi, N., Kato, K. *Regularizing effect for the (generalized) Korteweg de Vries equation and nonlinear Schrödinger equations*, Ann.Inst. H.Poincaré, Analyse non linéaire, **9** (1995), 673–725.

[3] Hayashi, N., Kato, K *Regularity in time of solution to nonlinear Schrödinger equations,* J. Funct. Anal. **128** (1995), 253–277.

[4] Hayashi, N., Kato, K *Analyticity in time and smoothing effect of solutions to nonlinear Schrödinger equations,* Comm. Math. Phys. **184** (1997), 273–300.

[5] Hayashi, N., Saitoh, S. *Analytichity and smoothing effect for the Schrödiner equation,* Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **52** (1990), 163–173.

[6] Kato, K., Ogawa, T., *Analyticity and Smoothing Effect for the Korteweg de Vries Equation with a single point singularity*, Math. Annalen, (2000), to appear.

[7] Kato, K., Taniguchi, K., *Gevrey regularizing effect for nonlinear Schrödinger equations*, Osaka J. Math., **33** (1996), 863–880.

[8] Kato, T., Masuda, K., *Nonlinear evolution equations and analyticity I,* Ann.Inst.Henri Poincaré. Analyse non linéaire, **3** no. 6 (1986), 455–467.

[9] Ukai, S. *Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff.* Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 141-156.