L^2 well-posedness on Cauchy problem of 3rd order Schrödinger-type equations

古財 俊秀（ 東京理科大・理 ）

ここでは 3 階の偏微分作用素を持つ発展方程式の Cauchy 問題を考える.

$$\begin{cases} (\partial_t + a^w(x,D))u = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

次の条件を仮定する.

(A0) $a = ia_3 + a_2 + a_1 + a_0, \quad a_j \in S^j_{1,0} \quad (0 \le j \le 3) \quad a_3$ は実表象.

(A1) $e(x,\xi) \ge \delta\langle\xi\rangle$ for $\exists\delta > 0$ かつ $\{e,a_3\},\{e,a_2\} \in S^1_{1,0}$ であるような $e \in S^1_{1,0}$ が存在する.

(A2) $H_{a_3+Ima_2}p + Re(a_2+a_1) \ge -C$ となるような実表象 $p \in S^1_{1,0}$ と $C > 0$ が存在する.

(A3) $H_{a_3+Ima_2}p + Re(a_2+a_1) \ge -K\log\langle\xi\rangle - K'(\log\langle\xi\rangle)^2 - K''(\log\langle\xi\rangle)^4 - K'''(\log\langle\xi\rangle)^5 - C$ となるような実表象 $p \in S(\log\langle\xi\rangle, |dx|^2 + \langle\xi\rangle^{-2}|d\xi|^2)$ と $K, K', K'', K''', C > 0$ が存在する.

そのとき次の定理が成り立つ.

定理 **1.1** $s \in \mathbf{R}$ とし,(A0),(A1),(A2) を仮定する. そのとき $\forall u_0 \in H^s, \forall f \in L^1([0,T];H^s)$ に対して,(1) の解 $u \in C^1([0,T];H^s)$ が存在して,

$$||u(t)||_s \le C_1(||u(0)||_s + \int_0^t ||f(\tau)||_s d\tau), \quad (0 \le t \le T)$$

が成り立ち, 解は $C^1([0,T];H^{-\infty})$ で一意である. さらに $f \in L^2([0,T];H^s)$ ならば $u \in L^2([0,T];X^s)$ は次を満足する.

$$\int_0^t ||u(\tau)||^2_{X^s} d\tau \le C_2(||u(0)||^2 + \int_0^t ||f(\tau)||^2_s d\tau).$$

ここで X^s は次の norm を持つ Hilbert 空間とする.

$$||u||^2_{X^s} = ((H_{a_3+Ima_2}p + Re(a_2+a_1))^w(x,D)\langle D\rangle^s u, \langle D\rangle^s u) + C_s||u||^2_s.$$

ここで C_s は十分大きな定数とする.

定理 **1.2** $s \in \mathbf{R}$ とし,(A0),(A1),(A3) を仮定する. そのとき $\forall u_0 \in H^s, \forall f \in L^1([0,T];H^s)$ に対して,(1) の解 $u \in C^1([0,T];H^{s-\gamma})$ が存在して,

$$||u(t)||_{s-\gamma} \le C_1(||u(0)|| + \int_0^t ||f(\tau)||_s d\tau), \quad (0 \le t \le T)$$

が成り立ち,$C^1([0,T];H^{-\infty})$ で一意である. ここに $\gamma, C_1 > 0$ で γ は s に無関係な定数である.