

時間に依存する外力を持つ NAVIER-STOKES 方程式の弱 L^N -空間に属する解

山崎 昌男

§1. Introduction.

$n \geq 3$ とし, Ω は全空間 $\mathbb{R}^n$, 半空間 $\mathbb{R}_+^n = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$, 滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^n$ の外部領域のいずれかであるとする. 時間に依存し, $t \rightarrow \infty$ のとき必ずしも減衰しない (例えば時間について周期的な) 外力 $f(t, x)$ が存在するときの Ω 上の Dirichlet 境界条件を持つ非定常 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla)u(t, x) + \text{grad } \pi(t, x) &= f(t, x) \text{ in } I \times \Omega, \\ \text{div } u(t, x) &= 0 \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u(t, x) &= 0 \quad \text{on } I \times \partial\Omega \end{aligned}$$

を考える. ただし $I = \mathbb{R}$ または $I = (0, \infty)$ で, $I = (0, \infty)$ のときは初期条件

$$u(0, x) = a(x)$$

をおく.

この問題はまず $\Omega = \mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+^3$ のときに Maremonti [1,2] によって扱われ, ある $p < 3/2$ について

$$f(t, \cdot) \in L^\infty \left(I, L^3(\Omega) \cap \dot{H}_p^{-1}(\Omega) \right)$$

をみたす小さい $f(t, x)$ に対して解の一意存在と安定性が示された. ここで $\dot{H}_p^{-1}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ の函数の一回微分の和の形に書ける函数の空間を表す. 次いで小園-中尾 [3] により, $n \geq 3$ に対する $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^n$ あるいは $n \geq 4$ に対する $\mathbb{R}^n$ の外部領域の場合に, ある $p < n/2$ 及び $r > n/3$ について

$$f(t, \cdot) \in L^\infty \left(\mathbb{R}, L^r(\Omega) \cap \dot{H}_p^{-1}(\Omega) \right)$$

をみたす小さい $f(t, x)$ に対して解の一意存在が示された. [3] で構成された解は, ある $q < n$ 及び $s > n$ について $u \in C(\mathbb{R}, L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega))$ をみたす. さらに谷内 [4] は, [3] で構成された解の $L^n(\Omega)$ に属する初期摂動についての安定性を示した. また Salvi [5] は, Ω が 3 次元外部領域の場合に, t について周期 T を持つ

$$f(t, \cdot) \in L^2 \left([0, T] : L^2(\Omega) \cap \dot{H}_2^{-1}(\Omega) \right)$$

に対し, t について周期 T を持つ弱解の存在を示し, さらに $f(t, x)$ が小さいときに t について周期 T を持つ強解の存在を示した.

一方 f が t に依存しないとき , 定常 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + (u(x) \cdot \nabla)u(x) + \operatorname{grad} \pi(x) &= f(x) \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} u(x) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

に対しては小園-山崎 [6] により , 3 次元外部領域も含め , $f(x) \in \dot{H}_{n/2,\infty}^{-1}(\Omega)$ に属する小さい $f(x)$ に対し , $L^{n,\infty}(\Omega)$ に属する小さい解 $u(x)$ の一意存在が示されている . ここで $L^{n,\infty}(\Omega)$ は以下に導入する Lorentz 空間を表し , $\dot{H}_{n/2,\infty}^{-1}(\Omega)$ は $L^{n/2,\infty}(\Omega)$ の函数の一回微分の和の形に書ける函数の空間を表す . また解の一意性は , $L^{n,\infty}(\Omega)$ に属する小さい解に対してのみ示されている .

$1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ 及び $u(x) \in L_{\operatorname{loc}}^p(\Omega)$ に対し ,

$$\|u\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \left(s \mu(\{x \in \Omega \mid |u(x)| > s\})^{1/p} \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} & \text{for } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} \mu(\{x \in \Omega \mid |u(x)| > s\})^{1/p} & \text{for } q = \infty \end{cases}$$

とおく . 次に Lorentz 空間 $L^{p,q}(\Omega)$ を $L^{p,q}(\Omega) = \{u(x) \in L_{\operatorname{loc}}^p(\Omega) \mid \|u\|_{p,q} < +\infty\}$ と定める . このとき $L^{p,q}(\Omega)$ は $\|u\|_{p,q}$ と同値なノルムにより Banach 空間となる . 特に $L^{p,p}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ と一致する . また $q < r$ ならば $L^{p,q}(\Omega) \subset L^{p,r}(\Omega)$ となり , $1 \leq q < \infty$ ならば $L^{p,q}(\Omega)^* = L^{p/(p-1),q/(q-1)}(\Omega)$ となる .

ここでは最初に述べた非定常問題が 3 次元外部領域の場合も含めて , 定常問題と同じ函数空間の設定で , 解の大きさについての条件の下で一意的に解けることを示す .

§2. 主結果.

結果を述べるために mild solution を導入する . 以下外力 $f(t, x) = (f_k(t, x))_{k=1}^n$ は $f_k(t, x) = \sum_{j=1}^n (\partial F_{jk} / \partial x_j)(t, x)$ の形に表されているとする .

$u(t, x) \in BUC(\mathbb{R}, L_{\sigma}^{n,\infty}(\Omega))$ は , 任意の $\varphi \in C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 及び $t \in \mathbb{R}$ に対して等式

$$\begin{aligned} &(u(t, \cdot), \varphi) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \int_0^{+\infty} \left(u_j(t-\tau, \cdot), u_k(t-\tau, \cdot) - F_{jk}(t-\tau, \cdot), \frac{\partial}{\partial x_j} (\exp(-\tau A) \varphi)_k \right) d\tau \end{aligned}$$

が成立するとき , $I = \mathbb{R}$ に対する Navier-Stokes 方程式の mild solution であると呼ばれる . この式は , 微分方程式を書き直して得られる区間 $(-\infty, t)$ 上の積分方程式

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau A) \{ -(u(t-\tau) \cdot \nabla)u(t-\tau) + f(t-\tau) \} d\tau$$

と $\varphi \in C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ との pairing を取り , 部分積分して得られるものである .

また , $u(t, x) \in BC((0, \infty), L_{\sigma}^{n,\infty}(\Omega))$ は , 任意の $\varphi \in C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 及び $t > 0$ に対して等式

$$\begin{aligned} &(u(t, \cdot), \varphi) = (a, \exp(-tA) \varphi) + \\ &\sum_{j,k=1}^n \int_0^t \left(u_j(t-\tau, \cdot), u_k(t-\tau, \cdot) - F_{jk}(t-\tau, \cdot), \frac{\partial}{\partial x_j} (\exp(-\tau A) \varphi)_k \right) d\tau \end{aligned}$$

が成立するとき , $I = (0, \infty)$ に対する Navier-Stokes 方程式の mild solution であると呼ばれる .

このとき主結果は次の通りである .

定理 1. $F(t, \cdot) \in BUC \left(\mathbb{R}, (L^{n/2, \infty}(\Omega))^{n^2} \right)$ が十分小さければ , $I = \mathbb{R}$ に対する Navier-Stokes 方程式の小さい mild solution が一意的に存在する . さらに $F(t, \cdot)$ に $u(t, \cdot)$ を対応させる写像は連続である .

定理 2. $a(x) \in L_{\sigma}^{n, \infty}(\Omega)$ 及び $F(t, \cdot) \in BC \left((0, \infty), (L^{n/2, \infty}(\Omega))^{n^2} \right)$ が十分小さければ , $I = \mathbb{R}$ に対する Navier-Stokes 方程式の小さい mild solution が一意的に存在する . さらに $(a(x), F(t, \cdot))$ に $u(t, \cdot)$ を対応させる写像は連続である .

§3. Stokes 半群に対する L^p - L^q 評価の Lorentz 空間版.

これらを証明するために , Stokes 半群に対するいわゆる L^p - L^q 評価を Lorentz 空間に拡張し , さらにその精密化を考える . Ω が上の条件をみたすとき

$$\begin{aligned} L_{\sigma}^p(\Omega) &= \{u(x) \in (L^p(\Omega))^n \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega, n \cdot u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ G^p(\Omega) &= \{\operatorname{grad} f(x) \in (L^p(\Omega))^n \mid f(x) \in L_{\operatorname{loc}}^p(\Omega)\} \end{aligned}$$

とおくと , Ω における Helmholtz 分解 $(L^p(\Omega))^n = L_{\sigma}^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$ が定義される . この分解に対応する $(L^p(\Omega))^n$ から $L_{\sigma}^p(\Omega)$ への射影作用素を P_p とおくと , 任意の $p \in (1, \infty)$ に対して Stokes 作用素 $A = -P_p \Delta$ は空間 $L_{\sigma}^p(\Omega)$ 上の有界解析的半群を生成し , さらにいわゆる L^p - L^q 評価

$$\begin{aligned} \|\exp(-tA)u\|_q &\leq C_{p,q} t^{n/2(1/q-1/p)} \|u\|_p \quad \text{for } t > 0, 1 < p \leq q < \infty, \\ \|\nabla \exp(-tA)u\|_q &\leq C_{p,q} t^{n/2(1/q-1/p)-1/2} \|u\|_p \quad \text{for } t > 0, 1 < p \leq q \leq n \end{aligned}$$

をみたす . (加藤 [7], 鵜飼 [8], Borchers-宮川 [9], 岩下 [10], 儀我-Sohr [11], Borchers-宮川 [12] を参照.) 一方 L^p -空間と同様に , Lorentz 空間においても Helmholtz 分解 $(L^{p,q}(\Omega))^n = L_{\sigma}^{p,q}(\Omega) \oplus G^{p,q}(\Omega)$ が成立し , 従って Stokes 作用素 A が定義される . (宮川-山田 [13] を参照 .) このとき以下の結果が成り立つ .

定理 3.

- (1) 任意の $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$ に対し , 作用素 $-A$ は空間 $L_{\sigma}^{p,q}(\Omega)$ 上の “有界解析的半群” $\exp(-tA)$ を生成する . (ただし $q = \infty$ のときは $t = 0$ において $\exp(-tA)$ は強連続ではない.)
- (2) $1 < p < q < \infty$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\|\exp(-tA)u\|_{q,1} \leq C_{p,q} t^{n/2(1/q-1/p)} \|u\|_{p,\infty}$$

が任意の $u(x) \in L_{\sigma}^{p,\infty}(\Omega)$ に対して成立する .

- (3) $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+^n$ の時は $1 < p < q < \infty$, Ω が外部領域の時は $1 < p < q \leq n$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\|\nabla \exp(-tA)u\|_{q,1} \leq C_{p,q} t^{n/2(1/q-1/p)-1/2} \|u\|_{p,\infty}$$

が任意の $u(x) \in L_{\sigma}^{p,\infty}(\Omega)$ に対して成立する .

この定理は通常の L^p - L^q 評価に実補間を施して得られるが, (3) を外部領域 Ω , $q = n$ に対して得るために次の補題を用いる. この補題の $1 < p = q < n$ の場合は [12] によって得られている.

補題. 外部領域 Ω において $1 < p < n$, $1 \leq q \leq \infty$ であるかまたは $p = n$, $q = 1$ ならば任意の $u(x) \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ に対して評価式 $\|\nabla u\|_{p,q} \leq C_{p,q} \|A^{1/2}u\|_{p,q}$ が成り立つ.

定理 3 (3) の結論の式において q を固定し, $u(x)$ に $t \in (0, \infty)$ の函数 $t^{n/2(1/p-1/q)} \|\exp(-tA)u\|_q$ 及び $t^{n/2(1/p-1/q)+1/2} \|\nabla \exp(-tA)u\|_q$ を対応させる写像を考え, これに実補間を施すと次の定理を得る.

定理 4.

(1) $1 < p < q < \infty$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\int_0^\infty t^{n/2(1/p-1/q)-1} \|\exp(-tA)u\|_{q,1} dt \leq C_{p,q} \|u\|_{p,1}$$

が任意の $u(x) \in L_\sigma^{p,1}(\Omega)$ に対して成立する.

(2) $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+^n$ の時は $1 < p < q < \infty$, Ω が外部領域の時は $1 < p < q \leq n$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\int_0^\infty t^{n/2(1/p-1/q)-1/2} \|\nabla \exp(-tA)u\|_{q,1} dt \leq C_{p,q} \|u\|_{p,1}$$

が任意の $u(x) \in L_\sigma^{p,1}(\Omega)$ に対して成立する.

§4. 定理 1 の証明.

小園-中尾 [3] の方法に従い, iteration scheme

$$\frac{\partial u_{j+1}}{\partial t}(t) + Au_{j+1}(t) + P(u_j(t) \cdot \nabla)u_j(t) = f(t)$$

を積分方程式に書き直して得られる

$$u_{j+1}(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-sA) [f(t-s) - (u_j(t-s) \cdot \nabla)u_j(t-s)] ds$$

を考える. この積分の $L^p(\Omega)$ の強位相での収束を確かめるのは困難である. そこで上の定理 4 を用いて, この積分が $L^{n,\infty}(\Omega)$ の汎弱位相で収束することを示す. そのために, 任意の $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ に対して等式

$$\begin{aligned} & (u_{j+1}(t, \cdot), \varphi) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^n \int_0^{+\infty} \left(u_{j,k}(t-\tau, \cdot) u_{j,\ell}(t-\tau, \cdot) - F_{k\ell}(t-\tau, \cdot), \frac{\partial}{\partial x_k} (\exp(-\tau A)\varphi)_\ell \right) d\tau \end{aligned}$$

が成り立ち, かつ

$$1 < \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-2} \leq n, \quad \frac{n}{2} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n} \right) - \frac{1}{2} = 0$$

であるから定理 4 より $B = \{\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \mid \|\varphi\|_{n/(n-1),1} \leq 1\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}(t)\|_{n,\infty} &\leq C \sup_{\varphi \in B} |(u_{j+1}(t), \varphi)| \\
&\leq C \sup_{\varphi \in B} \int_0^{+\infty} |(-F(t-s) + u_j(t-s) \otimes u_j(t-s), \nabla \exp(-sA)\varphi)| ds \\
&\leq C \left(\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(\tau, \cdot)\|_{n/2,\infty} + \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|u_j(\tau, \cdot)\|_{n,\infty}^2 \right) \\
&\quad \sup_{\varphi \in B} \int_0^{+\infty} \|\nabla \exp(-sA)\varphi\|_{n/(n-2),1} ds \\
&\leq C \left(\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(\tau, \cdot)\|_{n/2,\infty} + \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|u_j(\tau, \cdot)\|_{n,\infty}^2 \right)
\end{aligned}$$

となることが示せる。

参考文献

- [1] P. Maremonti, *Existence and stability of time periodic solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space*, Nonlinearity **4** (1991), 503–529.
- [2] P. Maremonti, *Some theorems of existence for solutions of the Navier-Stokes equations with slip boundary conditions in half-space*, Ricerche Mat. **40** (1991), 81–135.
- [3] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tôhoku Math. J. **48** (1996), 33–50.
- [4] Y. Taniuchi, *On stability of periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 147–173.
- [5] R. Salvi, *On the existence of periodic weak solutions on the Navier-Stokes equations in exterior regions with periodically moving boundaries*, Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems, Proc. Third Int. Conf. in Funchal, Madeira, Portugal, 1994, A. Sequeira, ed., Plenum, New York, 1995, pp. 63–73.
- [6] H. Kozono and M. Yamazaki, *Exterior problem for the stationary Navier-Stokes equations in the Lorentz space*, Math. Ann. **310** (1998), 279–305.
- [7] T. Kato, *Strong L^p -solution of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.
- [8] S. Ukai, *A solution formula for the Stokes equation in $\mathbb{R}_+^n$* , Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 611–621.
- [9] W. Borchers and T. Miyakawa, *L^2 decay for the Navier-Stokes flow in half spaces*, Math. Ann. **282** (1988), 139–155.
- [10] H. Iwashita, *L_q - L_r estimates for solutions of nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.
- [11] Y. Giga and H. Sohr, *On the Stokes operator in exterior domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **36** (1989), 103–130.
- [12] W. Borchers and T. Miyakawa, *Algebraic L^2 -decay for Navier-Stokes flows in exterior domains*, Acta Math. **165** (1990), 189–227.
- [13] T. Miyakawa and M. Yamada, *Planar Navier-Stokes flows in a bounded domain with measures as initial vorticities*, Hiroshima Math. J. **22** (1992), 401–420.