時間に依存する外力を持つ NAVIER-STOKES 方程式の弱 L^N- 空間に属する解

山崎　昌男

§1. Introduction.

$n \geq 3$ とし，Ω は全空間 $\mathbb{R}^n$, 半空間 $\mathbb{R}^n_+ = (0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$, 滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^n$ の外部領域のいずれかであるとする．時間に依存し，$t \to \infty$ のとき必ずしも減衰しない (例えば時間について周期的な) 外力 $f(t,x)$ が存在するときの Ω 上の Dirichlet 境界条件を持つ非定常 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + \big(u(t,x)\cdot\nabla\big)u(t,x) + \operatorname{grad}\pi(t,x) &= f(t,x) \text{ in } I\times\Omega, \\ \operatorname{div} u(t,x) &= 0 \qquad \text{in } I\times\Omega, \\ u(t,x) &= 0 \qquad \text{on } I\times\partial\Omega \end{aligned}$$

を考える．ただし $I = \mathbb{R}$ または $I = (0,\infty)$ で，$I = (0,\infty)$ のときは初期条件

$$u(0,x) = a(x)$$

をおく．

この問題はまず $\Omega = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3_+$ のときに Maremonti [1,2] によって扱われ，ある $p < 3/2$ について

$$f(t,\cdot) \in L^\infty\left(I, L^3(\Omega) \cap \dot{H}_p^{-1}(\Omega)\right)$$

をみたす小さい $f(t,x)$ に対して解の一意存在と安定性が示された．ここで $\dot{H}_p^{-1}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ の函数の一回微分の和の形に書ける函数の空間を表す．次いで小薗-中尾 [3] により，$n \geq 3$ に対する $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+$ あるいは $n \geq 4$ に対する $\mathbb{R}^n$ の外部領域の場合に，ある $p < n/2$ 及び $r > n/3$ について

$$f(t,\cdot) \in L^\infty\left(\mathbb{R}, L^r(\Omega) \cap \dot{H}_p^{-1}(\Omega)\right)$$

をみたす小さい $f(t,x)$ に対して解の一意存在が示された．[3] で構成された解は，ある $q < n$ 及び $s > n$ について $u \in C\left(\mathbb{R}, L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega)\right)$ をみたす．さらに谷内 [4] は，[3] で構成された解の $L^n(\Omega)$ に属する初期摂動についての安定性を示した．また Salvi [5] は, Ω が 3 次元外部領域の場合に，t について周期 T を持つ

$$f(t,\cdot) \in L^2\left([0,T] : L^2(\Omega) \cap \dot{H}_2^{-1}(\Omega)\right)$$

に対し，t について周期 T を持つ弱解の存在を示し，さらに $f(t,x)$ が小さいときに t について周期 T を持つ強解の存在を示した．

一方 f が t に依存しないとき，定常 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \big(u(x)\cdot\nabla\big)u(x) + \operatorname{grad}\pi(x) &= f(x) \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} u(x) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

に対しては小薗-山崎 [6] により，3 次元外部領域も含め，$f(x) \in \dot{H}^{-1}_{n/2,\infty}(\Omega)$ に属する小さい $f(x)$ に対し，$L^{n,\infty}(\Omega)$ に属する小さい解 $u(x)$ の一意存在が示されている．ここで $L^{n,\infty}(\Omega)$ は以下に導入する Lorentz 空間を表し，$\dot{H}^{-1}_{n/2,\infty}(\Omega)$ は $L^{n/2,\infty}(\Omega)$ の函数の一回微分の和の形に書ける函数の空間を表す．また解の一意性は，$L^{n,\infty}(\Omega)$ に属する小さい解に対してのみ示されている．

$1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ 及び $u(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し，

$$\|u\|_{p,q} = \begin{cases} \displaystyle\left(\int_0^{+\infty} \Big(s\mu\left(\{x \in \Omega \mid |u(x)| > s\}\right)^{1/p} \Big)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} & \text{for } 1 \le q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \mu\left(\{x \in \Omega \mid |u(x)| > s\}\right)^{1/p} & \text{for } q = \infty \end{cases}$$

とおく．次に Lorentz 空間 $L^{p,q}(\Omega)$ を $L^{p,q}(\Omega) = \{u(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid \|u\|_{p,q} < +\infty\}$ と定める．このとき $L^{p,q}(\Omega)$ は $\|u\|_{p,q}$ と同値なノルムにより Banach 空間となる．特に $L^{p,p}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ と一致する．また $q < r$ ならば $L^{p,q}(\Omega) \subset L^{p,r}(\Omega)$ となり，$1 \le q < \infty$ ならば $L^{p,q}(\Omega)^* = L^{p/(p-1),q/(q-1)}(\Omega)$ となる．

ここでは最初に述べた非定常問題が 3 次元外部領域の場合も含めて，定常問題と同じ函数空間の設定で，解の大きさについての条件の下で一意的に解けることを示す．

§2. 主結果.

結果を述べるために mild solution を導入する．以下外力 $f(t,x) = (f_k(t,x))_{k=1}^n$ は $f_k(t,x) = \sum_{j=1}^n (\partial F_{jk}/\partial x_j)(t,x)$ の形に表されているとする．

$u(t,x) \in BUC\left(\mathbb{R}, L^{n,\infty}_\sigma(\Omega)\right)$ は，任意の $\varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ 及び $t \in \mathbb{R}$ に対して等式

$$\begin{aligned} &\big(u(t,\cdot),\varphi\big) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \int_0^{+\infty} \left(u_j(t-\tau,\cdot), u_k(t-\tau,\cdot) - F_{jk}(t-\tau,\cdot), \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\exp(-\tau A)\varphi\big)_k \right) d\tau \end{aligned}$$

が成立するとき，$I = \mathbb{R}$ に対する Navier-Stokes 方程式の mild solution であると呼ばれる．この式は，微分方程式を書き直して得られる区間 $(-\infty, t)$ 上の積分方程式

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau A)\left\{ -\big(u(t-\tau)\cdot\nabla\big)u(t-\tau) + f(t-\tau) \right\} d\tau$$

と $\varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ との pairing を取り，部分積分して得られるものである．

また，$u(t,x) \in BC\left((0,\infty), L^{n,\infty}_\sigma(\Omega)\right)$ は，任意の $\varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ 及び $t > 0$ に対して等式

$$\begin{aligned} &\big(u(t,\cdot),\varphi\big) = \big(a, \exp(-tA)\varphi\big) + \\ &\sum_{j,k=1}^n \int_0^t \left(u_j(t-\tau,\cdot), u_k(t-\tau,\cdot) - F_{jk}(t-\tau,\cdot), \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\exp(-\tau A)\varphi\big)_k \right) d\tau \end{aligned}$$

が成立するとき，$I=(0,\infty)$ に対する Navier-Stokes 方程式の mild solution であると呼ばれる．

このとき主結果は次の通りである．

定理 1. $F(t,\cdot)\in BUC\left(\mathbb{R},\left(L^{n/2,\infty}(\Omega)\right)^{n^2}\right)$ が十分小さければ，$I=\mathbb{R}$ に対する Navier-Stokes 方程式の小さい mild solution が一意的に存在する．さらに $F(t,\cdot)$ に $u(t,\cdot)$ を対応させる写像は連続である．

定理 2. $a(x)\in L^{n,\infty}_{\sigma}(\Omega)$ 及び $F(t,\cdot)\in BC\left((0,\infty),\left(L^{n/2,\infty}(\Omega)\right)^{n^2}\right)$ が十分小さければ，$I=\mathbb{R}$ に対する Navier-Stokes 方程式の小さい mild solution が一意的に存在する．さらに $\big(a(x),F(t,\cdot)\big)$ に $u(t,\cdot)$ を対応させる写像は連続である．

§3. Stokes 半群に対する L^p-L^q 評価の Lorentz 空間版.

これらを証明するために，Stokes 半群に対するいわゆる L^p-L^q 評価を Lorentz 空間に拡張し，さらにその精密化を考える．Ω が上の条件をみたすとき

$$L^p_{\sigma}(\Omega)=\{u(x)\in(L^p(\Omega))^n \mid \operatorname{div}u=0 \text{ in } \Omega, n\cdot u=0 \text{ on } \partial\Omega\},$$
$$G^p(\Omega)=\{\operatorname{grad}f(x)\in(L^p(\Omega))^n \mid f(x)\in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}$$

とおくと，Ω における Helmholtz 分解 $(L^p(\Omega))^n=L^p_{\sigma}(\Omega)\oplus G^p(\Omega)$ が定義される．この分解に対応する $(L^p(\Omega))^n$ から $L^p_{\sigma}(\Omega)$ への射影作用素を P_p とおくと，任意の $p\in(1,\infty)$ に対して Stokes 作用素 $A=-P_p\Delta$ は空間 $L^p_{\sigma}(\Omega)$ 上の有界解析的半群を生成し，さらにいわゆる L^p-L^q 評価

$$\|\exp(-tA)u\|_q\le C_{p,q}t^{n/2(1/q-1/p)}\|u\|_p \qquad \text{for } t>0,\ 1<p\le q<\infty,$$
$$\|\nabla\exp(-tA)u\|_q\le C_{p,q}t^{n/2(1/q-1/p)-1/2}\|u\|_p \ \text{for } t>0,\ 1<p\le q\le n$$

をみたす. (加藤 [7], 鵜飼 [8], Borchers-宮川 [9], 岩下 [10], 儀我-Sohr [11], Borchers-宮川 [12] を参照.) 一方 L^p-空間と同様に，Lorentz 空間においても Helmholtz 分解 $(L^{p,q}(\Omega))^n=L^{p,q}_{\sigma}(\Omega)\oplus G^{p,q}(\Omega)$ が成立し，従って Stokes 作用素 A が定義される．(宮川-山田 [13] を参照 .) このとき以下の結果が成り立つ．

定理 3.

(1) 任意の $p\in(1,\infty)$, $q\in[1,\infty]$ に対し，作用素 $-A$ は空間 $L^{p,q}_{\sigma}(\Omega)$ 上の "有界解析的半群" $\exp(-tA)$ を生成する．(ただし $q=\infty$ のときは $t=0$ において $\exp(-tA)$ は強連続ではない.)

(2) $1<p<q<\infty$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\|\exp(-tA)u\|_{q,1}\le C_{p,q}t^{n/2(1/q-1/p)}\|u\|_{p,\infty}$$

が任意の $u(x)\in L^{p,\infty}_{\sigma}(\Omega)$ に対して成立する．

(3) $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ の時は $1<p<q<\infty$, Ω が外部領域の時は $1<p<q\le n$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\|\nabla\exp(-tA)u\|_{q,1}\le C_{p,q}t^{n/2(1/q-1/p)-1/2}\|u\|_{p,\infty}$$

が任意の $u(x)\in L^{p,\infty}_{\sigma}(\Omega)$ に対して成立する．

この定理は通常の L^p-L^q 評価に実補間を施して得られるが，(3) を外部領域 Ω, $q=n$ に対して得るために次の補題を用いる．この補題の $1<p=q<n$ の場合は [12] によって得られている．

補題．外部領域 Ω において $1<p<n$, $1\le q\le\infty$ であるかまたは $p=n$, $q=1$ ならば任意の $u(x)\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ に対して評価式 $\|\nabla u\|_{p,q}\le C_{p,q}\|A^{1/2}u\|_{p,q}$ が成り立つ．

定理 3 (3) の結論の式において q を固定し，$u(x)$ に $t\in(0,\infty)$ の函数 $t^{n/2(1/p-1/q)}\|\exp(-tA)u\|_q$ 及び $t^{n/2(1/p-1/q)+1/2}\|\nabla\exp(-tA)u\|_q$ を対応させる写像を考え，これに実補間を施すと次の定理を得る．

定理 4.

(1) $1<p<q<\infty$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\int_0^\infty t^{n/2(1/p-1/q)-1}\|\exp(-tA)u\|_{q,1}\,dt\le C_{p,q}\|u\|_{p,1}$$

が任意の $u(x)\in L^{p,1}_\sigma(\Omega)$ に対して成立する．

(2) $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ の時は $1<p<q<\infty$, Ω が外部領域の時は $1<p<q\le n$ をみたす任意の p, q に対し評価式

$$\int_0^\infty t^{n/2(1/p-1/q)-1/2}\|\nabla\exp(-tA)u\|_{q,1}\,dt\le C_{p,q}\|u\|_{p,1}$$

が任意の $u(x)\in L^{p,1}_\sigma(\Omega)$ に対して成立する．

§4．定理 1 の証明．

小薗-中尾 [3] の方法に従い，iteration scheme

$$\frac{\partial u_{j+1}}{\partial t}(t)+Au_{j+1}(t)+P\big(u_j(t)\cdot\nabla\big)u_j(t)=f(t)$$

を積分方程式に書き直して得られる

$$u_{j+1}(t)=\int_0^{+\infty}\exp(-sA)\left[f(t-s)-\big(u_j(t-s)\cdot\nabla\big)u_j(t-s)\right]ds$$

を考える．この積分の $L^p(\Omega)$ の強位相での収束を確かめるのは困難である．そこで上の定理 4 を用いて，この積分が $L^{n,\infty}(\Omega)$ の汎弱位相で収束することを示す．そのために，任意の $\varphi\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ に対して等式

$$\begin{aligned}&\big(u_{j+1}(t,\cdot),\varphi\big)\\&=\sum_{k,\ell=1}^n\int_0^{+\infty}\left(u_{j,k}(t-\tau,\cdot)u_{j,\ell}(t-\tau,\cdot)-F_{k\ell}(t-\tau,\cdot),\frac{\partial}{\partial x_k}\big(\exp(-\tau A)\varphi\big)_\ell\right)d\tau\end{aligned}$$

が成り立ち，かつ

$$1<\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-2}\le n,\quad \frac{n}{2}\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n-2}{n}\right)-\frac{1}{2}=0$$

であるから定理 4 より $B = \left\{\varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) \mid \|\varphi\|_{n/(n-1),1} \le 1\right\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}(t)\|_{n,\infty} &\le C \sup_{\varphi\in B} |(u_{j+1}(t),\varphi)| \\
&\le C \sup_{\varphi\in B} \int_0^{+\infty} \left|\left(-F(t-s) + u_j(t-s)\otimes u_j(t-s), \nabla \exp(-sA)\varphi\right)\right| ds \\
&\le C \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \left\|F(\tau,\cdot)\right\|_{n/2,\infty} + \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \left\|u_j(\tau,\cdot)\right\|^2_{n,\infty} \right) \\
&\qquad \sup_{\varphi\in B} \int_0^{+\infty} \|\nabla \exp(-sA)\varphi\|_{n/(n-2),1} ds \\
&\le C \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \left\|F(\tau,\cdot)\right\|_{n/2,\infty} + \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \left\|u_j(\tau,\cdot)\right\|^2_{n,\infty} \right)
\end{aligned}$$

となることが示せる．

参考文献

[1] P. Maremonti, *Existence and stability of time periodic solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space*, Nonlinearity **4** (1991), 503–529.

[2] P. Maremonti, *Some theorems of existence for solutions of teh Navier-Stokes equations with slip boundary conditions in half-space*, Ricerche Mat. **40** (1991), 81–135.

[3] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tôhoku Math. J. **48** (1996), 33–50.

[4] Y. Taniuchi, *On stability of periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 147–173.

[5] R. Salvi, *On the existence of periodic weak solutions on the Navier-Stokes equations in exterior regions with periodically moving boundaries*, Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems, Proc. Third Int. Conf. in Funchal, Madeira, Portugal, 1994, A. Sequeira, ed., Plenum, New York, 1995, pp. 63–73.

[6] H. Kozono and M. Yamazaki, *Exterior problem for the stationary Navier-Stokes equations in the Lorentz space*, Math. Ann. **310** (1998), 279–305.

[7] T. Kato, *Strong L^p-solution of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[8] S. Ukai, *A solution formula for the Stokes equation in $\mathbb{R}^n_+$*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 611–621.

[9] W. Borchers and T. Miyakawa, *L^2 decay for the Navier-Stokes flow in half spaces*, Math. Ann. **282** (1988), 139–155.

[10] H. Iwashita, *L_q-L_r estimates for solutions of nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[11] Y. Giga and H. Sohr, *On the Stokes operator in exterior domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **36** (1989), 103–130.

[12] W. Borchers and T. Miyakawa, *Algebraic L^2-decay for Navier-Stokes flows in exterior domains*, Acta Math. **165** (1990), 189–227.

[13] T. Miyakawa and M. Yamada, *Planar Navier-Stokes flows in a bounded domain with measures as initial vorticities*, Hiroshima Math. J. **22** (1992), 401–420.